ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Sur les représentations factorielles finies de U (∞) et autres groupes semblables.* Note (*) de M. **Dan Voiculescu**, présentée par M. Jean Leray.

On montre, pour une classe de groupe comprenant U (∞), que les caractères des représentations factorielles finies (type I_n, $n < \infty$ où bien II_1) sont caractérisés parmi les fonctions centrales de type positif par une propriété de multiplicativité et on donne des exemples.

1. LES GROUPES CONSIDÉRÉS. — Soit G un groupe, Γ l'ensemble de ses classes d'éléments conjugués. Pour $g \in G$, soit $\hat{g} \in \Gamma$ sa classe et pour une fonction centrale f soit $\tilde{f}$ la fonction correspondante sur Γ. Un homomorphisme $\varphi : G \times G \to G$ définit une opération $\hat{g}_1 \oplus \hat{g}_2 = \widehat{\varphi(g_1, g_2)}$ sur Γ. Par la suite *on suppose qu'il existe* φ *tel que* « ⊕ » *soit commutative, associative et admette la classe* $\hat{e}$ *de l'unité comme élément neutre.* Il y a des homomorphismes $\varphi_n : G^n \to G$, tels que

$$\widehat{\varphi_n(g_1, \ldots, g_n)} = \hat{g}_1 \oplus \ldots \oplus \hat{g}_n$$

et $\hat{g} \to (\hat{g})^* = \widehat{g^{-1}}$ est un automorphisme de Γ.

2. CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES FINIES.

LEMME 1. — *Soit* F *un facteur fini (on suppose* Tr I = 1), A, B ⊂ F *deux sous-facteurs* (I ∈ A, I ∈ B) *qui commutent. Alors pour* S ∈ A, T ∈ B *on a* Tr ST = Tr S.Tr T.

Ce résultat connu est à la base du :

LEMME 2. — *Soit* ρ *une représentation factorielle finie de* G, $\chi_\rho(g) = \operatorname{Tr} \rho(g)$ $(g \in G)$ *son caractère. Alors on a*

$$\tilde{\chi}_\rho(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = \tilde{\chi}_\rho(\gamma_1)\tilde{\chi}_\rho(\gamma_2) \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma).$$

Soient F, A, B les W*-algèbres engendrées par ρ (G), ρ (φ (G × { e })), ρ (φ ({ e } × G)) et $\rho_1(g) = \rho(\varphi(g, e))$, $\rho_2(g) = \rho(\varphi(e, g))$. Comme $\hat{e} \oplus \hat{g} = \hat{g} \oplus \hat{e} = \hat{g}$ on aura

$$\operatorname{Tr} \rho_1(g) = \operatorname{Tr} \rho_2(g) = \operatorname{Tr} \rho(g).$$

On en déduit que ρ_1, ρ_2 sont factorielles quasi-équivalentes à ρ et on utilise le lemme 1.

C. Q. F. D.

Soit K l'ensemble des fonctions centrales de type positif $f : G \to \mathbf{C}$, $f(e) = 1$. Soient $f \in K$, $h \doteq \tilde{f}$, $a_{k+1} \in \mathbf{C}$, $g_{k+1} \in G$, $N = mn$, $c_{km+l} = a_{k+1}/m$,

$$g'_{km+l} = \varphi_N(\underbrace{e, \ldots, e}_{(km+l-1)-fois}, g_{k+1}, e, \ldots, e),$$

$\gamma_{k+1} = \hat{g}_{k+1}$, $(0 \leqq k \leqq n-1,\ 1 \leqq l \leqq m)$.

La relation $\sum_{1 \leqq i,j \leqq N} \bar{c}_i c_j f(g'_i g'^{-1}_j) \geqq 0$ donne pour $m \to \infty$:

$$\text{(P)} \qquad \sum_{1 \leqq i,\, j \leqq n} a_i \bar{a}_j h(\gamma_i \oplus \gamma_j^*) \geqq 0.$$

L'algèbre de convolution $l^1(\Gamma)$ admet une involution définie à l'aide de l'automorphisme $\gamma \to \gamma^*$. L'ensemble P des fonctions bornées $h : \Gamma \to \mathbf{C}$, $h(\hat{e}) = 1$ ayant la propriété (P) s'identifie à l'ensemble des états de $l^1(\Gamma)$. Si $f \in K$ est telle que

$$\text{(M)} \qquad \tilde{f}(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = \tilde{f}(\gamma_1)\tilde{f}(\gamma_2) \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma),$$

alors $\tilde{f} \in P$ est un point extrémal de P, la représentation associée de $l^1(\Gamma)$ étant unidimensionnelle irréductible (1). *A fortiori* f est alors un point extrémal de K. Nous avons donc prouvé :

THÉORÈME. — *Soit $f \in K$. Alors f est le caractère d'une représentation factorielle finie de* G, *si et seulement si $\tilde{f}$ a la propriété* (M).

COROLLAIRE 1. — *Le produit tensoriel de deux représentations factorielles finies de* G *est encore une représentation factorielle.*

COROLLAIRE 2. — *Soient* G, G′ *deux groupes satisfaisant à nos hypothèses,* $\omega : G' \to G$ *un homomorphisme tel que* $\varphi \circ (\omega \times \omega) = \omega \circ \varphi'$. *Si* ρ *est une représentation factorielle finie de* G *alors* $\rho \circ \omega$ *en est une de* G′.

3. EXEMPLES. — Soit H un espace hilbertien séparable, $\{ e_k \}_{k=1}$ une base orthogonale. Le groupe $U(\infty)$ (2) [la limite inductive des groupes $U(1) \subset U(2) \subset \ldots$] peut être identifiée au groupe des opérateurs unitaires V sur H tels que $V e_k = e_k$ à l'exception d'un nombre fini d'indices $k \in \mathbf{N}$. Soient $G_j \subset U(\infty)$ les sous-groupes des $V \in U(\infty)$ tels que $V e_{2k+j} = e_{2k+j}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, j = 1, 2$) et soient $\psi_j : U(\infty) \to G_j$ les isomorphismes évidents. On peut alors prendre $\varphi(g_1, g_2) = \psi_1(g_1)\psi_2(g_2)$. Pour avoir des représentations factorielles finies continues de $U(\infty)$ doué de la topologie limite inductive, il faut et il suffit de s'assurer de la continuité du caractère. Les résultats du paragraphe 2 montrent qu'un caractère de représentation factorielle finie est déterminé par sa restriction à $U(1) \simeq \{ z ; |z| = 1 \}$. En voici des exemples (3) :

$$p(z) = z^m \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-a_i}{1-a_i z} \right) \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1+b_j z}{1+b_j} \right) \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-c_k}{z-c_k} \right) e^{\lambda(z-1)+\mu(1/z-1)},$$

avec $m \in \mathbf{Z}$, $0 \leqq a_i < 1$, $0 \leqq b_j$, $0 \leqq c_k < 1$, $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$, $\sum a_i < \infty$, $\sum b_j < \infty$, $\sum c_k < \infty$. On peut procéder de même pour les groupes $Sp(\infty)$, $SU(\infty)$, $SO(\infty)$, $O(\infty)$ et aussi pour le groupe infini de permutations. Notre corollaire 2 et les exemples pour $U(\infty)$ donnent des exemples de représentations factorielles finies de ces groupes.

Les applications $V \to V \otimes I_{\mathbf{C}^2}$ de $U(2^n)$ en $U(2^{n+1})$, définissent une limite inductive des groupes $U(2^n)$. Pour ce groupe limite inductive on peut définir un homomorphisme φ à l'aide du produit tensoriel.

(*) Séance du 4 novembre 1974.

(1) J. DIXMIER, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

(2) Le problème d'étudier les représentations de $U(\infty)$ est mentionné par A. A. KIRILLOV, *Dokl. Akad. Nauk*, U.R.S.S., 212, 1973, p. 288-290.

(3) D. VOICULESCU, *Some type II_1 factor representations of* $U(\infty)$ [à paraître].

Institut de Mathématique,
Calea Griviţei no. 21,
Bucureşti 12,
République Socialiste de Roumanie.