Publications du Département de Mathématiques
nouvelle série
1987
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD–LYON 1
BÂT. No 101, 43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX FRANCE

A.Coste, P.Dazord et A.Weinstein

Groupoïdes Symplectiques

ISSN 0076-1656
© 1987

(1-18) 19-36
37-62

SOMMAIRE

INTRODUCTION

NOTATIONS ET REMARQUES GENERALES

I - GROUPOIDES - GROUPOIDES DE LIE

§ 1. Un exemple : groupoïde grossier sur un ensemble
§ 2. Définitions algébriques et premières propriétés
§ 3. Extension aux parties d'un groupoïde
§ 4. Groupoïdes de Lie
§ 5. Exemples de groupoïdes

II - GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

§ 1. Définition
§ 2. Algébroïdes de Lie d'un groupoïde symplectique
§ 3. Premiers exemples
§ 4. Cotangent d'un groupoïde
§ 5. Autres exemples

III - TROISIEME THEOREME DE LIE LOCAL POUR LES VARIETES DE POISSON

§ 1. Réalisations symplectiques
§ 2. Algébroïdes de Lie d'une variété de Poisson et troisième théorème de Lie.
§ 3. Réalisations symplectiques et quantification.

APPENDICE

§ 1. Réduction symplectique
§ 2. Relations canoniques
§ 3. Méthodes des caractéristiques

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

La notion de groupoïde algébrique est due à Brandt. Son utilisation en géométrie remonte à C. Ehresmann [E] : le premier groupoïde qu'il ait exhibé est le groupoïde de jauge d'un fibré principal.

Un groupoïde G est un ensemble muni d'une loi pas toujours définie, qui vérifie des axiomes analogues à ceux des groupes ; l'unique unité d'un groupe est remplacée par un sous-ensemble d'unités G_o et G est muni de deux applications (but et source) β et α à valeurs dans G_o. Le groupoïde est <u>de Lie</u> si de plus toutes les opérations prennent place dans la catégorie des variétés, α et β étant des submersions. Sur ce point nous rompons avec la terminologie usuelle qui réserve L'appellation groupoïde de Lie aux groupoïdes différentiels transitifs. La raison en est qu'à tout groupoïde de Lie $G \rightrightarrows G_o$ on associe canoniquement un algébroïde de Lie, au sens de J. Pradines, sur le fibré normal de G_o $\nu\, G_o \longrightarrow G_o$ et que cette correspondance généralise la correspondance groupe de Lie $\rightarrow$ Algèbre de Lie. D'autre part les groupoïdes que nous construisons ne sont pas, en général, transitif.

Un groupoïde symplectique Γ est un groupoïde de Lie muni d'une structure de variété symplectique compatible avec la multiplication au sens suivant : le graphe de la multiplication est une sous-variété lagrangienne de la variété symplectique produit $(-\Gamma) \times \Gamma \times \Gamma$ où $(-\Gamma)$ désigne Γ munie de la structure symplectique opposée. Les unités de Γ forment une sous-variété lagrangienne de Γ ce qui entraîne qu'en ce sens le seul "groupe symplectique" est le groupe trivial. C'est donc une notion essentiellement "groupoïde" à la différence de la notion de groupoïde de Poisson-Drinfeld : (Γ,Λ) est un groupoïde de Poisson si (Γ,Λ) est une variété de Poisson, si Γ_2 ensemble des couples composables est une sous-variété de Poisson de $\Gamma \times \Gamma$ et si la multiplication $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma$ est un morphisme de Poisson. En ce sens , les groupes de Poisson sont ceux introduits par Drinfeld. [Dr. 1983].

Un exemple remarquable de groupoïde symplectique est fourni par le groupoïde cotangent : si $G \rightrightarrows G_o$ est un groupoïde de Lie, $T^*G = \Gamma$ avec sa structure symplectique standard est un groupoïde symplectique d'unités $\nu^* G_o$ fibré conormal de G_o

dans G. Ainsi $\nu^* G_o$ se trouve muni d'une structure de Poisson particulière appelée de Lie Poisson qui généralise le cas du dual d'une algèbre de Lie. En effet cette structure induit sur les sections de νG_o la structure d'algébroïde de Lie de G.

$\Gamma = T^*G$ a également une autre structure de groupoïde symplectique pour l'addition dans les fibres. Ces deux structures sont compatibles et $\Gamma = T^*G$ est un groupoïde double au sens de C. Ehresmann.

Si G est un groupe, la première structure de groupoïde symplectique est celle sur $T^*G \rightrightarrows \underline{G}^*$ fournie par les moments des actions à gauche et à droite de G.

Le problème se pose inversement de savoir si, (Γ_o, Λ_o) étant une variété de Poisson, on peut lui associer un groupoïde symplectique Γ dont Γ_o est l'espace des unités. Le problème se décompose en deux

(1) réaliser Γ_o par $\alpha : (\Gamma, \sigma) \to (\Gamma_o, \Lambda_o)$ où α est un morphisme de Poisson, Γ_o étant identifiée à une sous-variété lagrangienne de Γ ;

(2) construire sur Γ une loi de groupoïde symplectique.

Pour tout point $x_o \in \Gamma_o$, le problème (1) a toujours une solution au un voisinage de x_o [W 1983].

Inversement il résulte de nombreux travaux [V.E.R.1964][Do. La 1966] [MP 1980] qu'il est illusoire même dans le cadre des Q-variétés d'espérer une réponse positive au problème (2) . Ceci a conduit Van Est a introduire [V.E. 1984] la notion de groupoïde local qui généralise la situation des voisinages de l'identité d'un groupe. Le principal résultat de cet article est de donner, dans le cadre des groupoïdes locaux, une réponse positive à la deuxième question. (Théorème III. 1.4 et III. 2.1).

Afin de préciser l' analogie avec le troisième théorème de Lie local, on montre qu'à toute variété de Poisson (Γ_o, Λ_o) est associée canoniquement un algébroïde de Lie sur $T^*\Gamma_o \to \Gamma_o$ de morphisme $\Lambda_o^\# \; T^*\Gamma_o \to T\Gamma_o$. Inversement toute structure d'algébroïde pour laquelle $\Lambda_o^\#$ définit un tenseur antisymétrique sur Γ_o et telle que les 1-formes fermés sur Γ_o constituent une sous-algèbre de Lie des sections de $T^*\Gamma_o$, est la structure canonique d'algébroïde d'une variété de Poisson.

Ainsi on a prouvé que tout tel algébroïde de Lie est l'algèbroïde de Lie d'un groupoïde symplectique local, ce qui étend aux variétés de Poisson quelconque le résultat constituant le troisième théorème de Lie vu sous forme symplectique, à savoir la réalisation du dual d'une algèbre de Lie par le cotangent d'un groupe. Le résultat obtenu est à rapprocher d'un théorème de J. Pradines [Pr. 1968] qui affirme que tout algébroïde de Lie est l'algébroïde d'un groupoïde local. Ici le résultat obtenu est plus fin : tout algèbroïde "symplectique" est l'algébroïde d'un groupoïde symplectique.

Comme il a été dit, en général (Γ,σ) ne sera pas un groupoïde. On donne cependant une condition fort simple, (Γ,σ) étant construit, pour savoir si sa structure algébrique est celle d'un groupoïde. (Proposition III.1.2').

La notion de groupoïde symplectique permet de répondre à plusieurs questions posées par Karasev et Maslov [K.M.1981][K.M. 1984] sur "l'algèbre enveloppante universelle" pour les approximations quasi-classiques des relations de commutations non linéaires. En particulier dans [K. 1986] Karasev pose les questions auxquelles répondent le théorème III.1.4 et la proposition III. 1.2'.(1) Sa construction des interpolations prend place dans le cadre géométrique de la proposition III. 1.2' c'est-à-dire où l'on a effectivement une structure de groupoïde En fait la lecture des papiers de Karasev et Maslov est un des principaux stimuli de ce travail ; suivant leur approche, il semble qu'une "quantification" convenablement développée pour les groupoïdes symplectiques fournirait un outil pour l'étude des relations de commutation non linéaires analogue à l'usage de la topologie et de l'analyse sur les groupes de Lie globaux dans l'étude des relations de commutation linéaires. Une telle théorie rendrait plus claires les relations, qui sont jusqu'ici surtout des analogies, entre groupoïdes symplectiques, produit * [B.F.F.L.S 1977] et les algèbres d'opérateurs en géométrie différentielle non commutative [C. 1982].

De façon plus immédiate, la notion de groupoïde symplectique unifie beaucoup de constructions en géométrie symplectique et de Poisson ; en particulier elle fournit un cadre pour l'étude de l'ensemble des réalisations symplectiques d'une variété de Poisson donnée.

(1) *Maslov (communication privée) annonce des résultats voisins du théorème III.1.4 dûs à Karasev notamment.*

Cet article, volontairement limité aux aspects géométriques de la théorie, trouve son origine dans un cours donné par A. Weinstein à l'Université Claude Bernard de Lyon, cours dont les résultats ont été annoncés dans [W. 1987] . De nombreuses discussions avec Jean Pradines ont permis de préciser la problématique et de clarifier les concepts utilisés. Nous lui adressons nos chaleureux remerciements ainsi qu'à D. Sondaz qui nous a assisté dans l'élaboration du manuscrit.

L'article est divisé en trois chapitres et un appendice. Un premier chapitre contient le cadre algébrico-différentiel, le second chapitre étudie plus précisément les groupoïdes symplectiques et la manière d'en construire. Le troisième chapitre est centré sur l'application aux réalisations symplectiques d'une variété de Poisson et au troisième théorème de Lie local. Un appendice regroupe quelques notions classiques de calcul lagrangien utilisées dans le cours du texte et une présentation succincte de la méthode des caractéristiques.

A.C. - P.D. - A.W.

NOTATIONS ET REMARQUES GENERALES

1. L'exemple du groupoïde d'holonomie suffit pour indiquer que l'on ne peut en général imposer la séparation aux variétés utilisées. Quand la variété considérée sera séparée, paracompacte, etc... ceci sera toujours spécifié.

2. Pour toute application f C^∞ entre variétés (M,N) Tf désigne l'application tangente $T_{x_o} f$ l'application tangente en x_o, $f^*_{x_o} = {}^tT_{x_o} f$ sa transposée.

3. Pour tout fibré C^∞ $E \to M$ sect(M,E) désigne l'espace des sections C^∞ de $E \to M$. Si N est une sous-variété de M et j l'inclusion de N dans M E_N désigne le fibré image réciproque de E par j.

4. Pour la théorie des variétés de Poisson on se reportera à [Lic. 1977] et [W. 1983]. Si (P,Λ) est une variété de Poisson de 2-tenseur Λ, on notera $\Lambda^\#$ le morphisme fibré de T^*P dans TP défini par $\omega \to \iota_\Lambda \omega$ où ι désigne systématiquement le produit intérieur. Dans le cas où (P,Λ) est une variété symplectique (i.e. Λ de rang maximum), si σ est la 2-forme symplectique, l'isomorphisme réciproque de $\Lambda^\#$ est $X \to -\iota_X\sigma$.

5. Pour tout groupe de Lie G on notera $\underline{G}$ son algèbre de Lie et $\underline{G}^*$ le dual de $\underline{G}$.

6. Pour tout sous-espace vectoriel V de T_xM où (M,σ) est symplectique, V^σ désigne l'orthogonal symplectique de V dans (T_xM,σ).

5/6

CHAPITRE I

Groupoïdes - Groupoïdes de Lie

§ 1. UN EXEMPLE : GROUPOIDE GROSSIER

Etant donné un ensemble X, les applications de X dans lui-même seront pour nous, identifiées à leur graphe ; si $a : X \to X$ est une application nous écrirons son graphe $\gamma_a = \{(a(x),x), x \in X\}$ dans l'ordre inverse de l'écriture usuelle.

Si a et b sont deux applications de X dans X, (z,x) est dans $\gamma_{a \circ b}$ s'il existe un y dans X tel que (z,y) soit dans γ_a et (y,x) dans γ_b ; en fait, on peut composer de cette façon deux parties quelconques de XxX (c'est-à-dire des relations). Si on "oublie" que $\Gamma = X \times X$ est un produit cartésien on retrouve l'opération de composition de ses parties en considérant sur Γ la structure algébrique suivante :

On dit que les éléments (x,y) et (w,z) de Γ sont composables si $y=w$ et on note Γ_2 l'ensemble des paires composables ; pour $((x,y,(y,z))$ dans Γ_2 on appelle (x,z) le produit qu'on note $(x,y).(y,z)$.

On a donc une multiplication partiellement définie dans $\Gamma \times \Gamma$, une partie $\Gamma_o = \{(x,x), x \in X\}$ d'unités, des projections $\beta : \beta(x,y) = (x,x)$ et $\alpha : \alpha(x,y) = (y,y)$ de Γ dans Γ_o , une opération d'inversion $i : i(x,y) = (y,x)$ avec des propriétés évidentes :

$$\beta(x,y).(x,y) = (x,y) \quad , \quad (x,y).\alpha(x,y) = (x,y) \ ,$$

$$(x,y).i(x,y) = \beta(x,y) \quad , \quad i(x,y).(x,y) = \alpha(x,y)$$

de plus, la partie Γ_2 est constituée des $((x,y),(w,z))$ tels que $\alpha(x,y) = \beta(w,z)$.

Si maintenant A et B sont deux parties de Γ , on peut définir A.B comme l'ensemble des (x,z) pour lesquels existe y avec $(x,y) \in A, (y,z) \in B$. On munit ainsi $\mathscr{P}(\Gamma)$ d'une structure de demi-groupe dont les éléments inversibles sont les graphes des bijections de X sur X.

§ 2. DEFINITIONS ALGEBRIQUES ET PREMIERES PROPRIETES.

En suivant l'exemple du § 1 , on appellera structure de groupoïde sur un ensemble ensemble Γ la donnée de deux applications α et β de Γ dans lui-même de même image Γ_o d'une multiplication m définie sur la partie Γ_2 de $\Gamma \times \Gamma$ formée des couples (x,y) tels que $\beta(y) = \alpha(x)$ et d'une application i de Γ dans Γ (l'inversion), vérifiant les axiomes suivants :

(Ass) : si l'un des produits $m(x,m\ (y,z))$ et $m(m(x,y),z)$ est défini, l'autre l'est aussi et lui est égal.

(Id) : les produits $m(\beta(x),x)$ et $m(x,\alpha(x))$ sont définis et égaux à x.

(Inv) : $m(x,i(x))$ est défini et égal à $\beta(x)$ et $m(i(x),x)$ est défini et égal à $\alpha(x)$.

Pour simplifier les écritures on notera x.y au lieu de m(x,y) et x^{-1} au lieu de i(x) s'il n'y a pas d'ambiguité. Une égalité z = x.y signifiera que le produit x.y est défini et égal à z.

LEMME : *Pour tout* x $\alpha(\beta(x)) = \beta(x)$ *et* $\beta(\alpha(x)) = \alpha(x)$ (1).

C'est la traduction de l'existence de $\beta(x).x$ et de $x.\alpha(x)$.

PROPOSITION 2.1 : *Si* $(x,y) \in \Gamma_2$, $\beta(x,y) = \beta(x)$ *et* $\alpha(x.y) = \alpha(y)$ (2)

De plus pour tout x *de* Γ $\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x)$ et $\beta(\beta(x)) = \beta(x)$ (3),

$\alpha(x^{-1}) = \beta(x)$ et $\beta(x^{-1}) = \alpha(x)$ (4).

DEMONSTRATION : Par (id) $x.y = (\beta(x).x).y) = \beta(x).(x.y)$ par (Ass) donc $\alpha(\beta(x)) = \beta(x.y)$ et le lemme donnt la première partie de (2) ; la démonstration de la deuxième partie est semblable ; les formules (3) résultent de l'axiome (Id) et les formules (4) de (Inv).

COROLLAIRE : $\alpha(x).\alpha(x) = \alpha(x)$ et $\beta(x).\beta(x) = \beta(x)$.

PROPOSITION 2.2 : (règle de simplification) : *Si* $x.y_1 = x.y_2$ *alors* $y_1 = y_2$ *et si* $x_1.y = x_2.y$ *alors* $x_1 = x_2$.

DEMONSTRATION : Si $x.y_1 = x.y_2$, $x^{-1}.(x.y_1) = x^{-1}.(x.y_2)$ et par (Ass) et (Inv) $\alpha(x).y_1 = \alpha(x).y_2$ et comme $\alpha(x) = \beta(y_1) = \beta(y_2)$, $y_1 = y_2$ et de même pour la simplification à droite.

COROLLAIRE : $(x^{-1})^{-1} = x$.

En effet $(x^{-1})^{-1}.x^{-1} = \alpha(x^{-1}) = \beta(x) = x.x^{-1}$.

REMARQUE : Γ_o est exactement l'ensemble des points fixes de α (ou de β). Si $x = \beta(x')$, $\beta(x) = \beta(\beta(x')) = \beta(x') = x$.

CAS PARTICULIERS.

1 - Si Γ_o est réduit à un élément, Γ est un groupe car la multiplication est alors partout définie et l'élément neutre est l'élément de Γ_o .

2 - Si, à l'opposé, $\Gamma = \Gamma_o$, α et β sont l'application identique (par la remarque ci-dessus) et donc les seuls produits définis sont les $x.x = x$, on appellera groupoïde nul un tel groupoïde.

3 - Plus généralement, si $\alpha = \beta$, $\alpha^{-1}(x)$ est un groupe pour chaque x de Γ_o ; c'est le cas, par exemple, d'un fibré vectoriel pour lequel Γ_o est la section nulle et l'opération de groupoïde est l'addition dans les fibres.

DEFINITION 2.1 : *Si Γ est un groupoïde, on appelle groupe d'isotropie d'un élément $u \in \Gamma_o$ le groupe* $\Gamma_u = \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u)$.

DEFINITION 2.2 : *L'ensemble $\beta(\alpha^{-1}(x))$, qui est identique à $\alpha(\beta^{-1}(x))$, $x \in \Gamma$ s'appelle orbite de Γ issue de x. L'ensemble des orbites de Γ forme une partition de Γ_o.*

DEFINITION 2.3 : *Etant donné deux groupoïdes Γ et Γ', un morphisme de groupoïdes de Γ dans Γ' est une application $f : \Gamma \to \Gamma'$ telle que si x et y sont multipliables dans Γ, f(x) et f(y) le sont dans Γ' et $f(x.y) = f(x).f(y)$.*

La règle de simplification montre que f commute aux projections, par exemple : $\beta'(f(x)).f(x) = f(x) = f(\beta(x).x) = f(\beta(x)).f(x)$, donc f conserve les β-fibres et induit une application $f_o : \Gamma_o \to \Gamma'_o$ sur les unités.

EXEMPLE : L'application (β,α) est un morphisme de groupoïdes de Γ dans le groupoïde grossier $\Gamma_o \times \Gamma_o$. On dit que le groupoïde est principal si (β,α) est injective.

REMARQUE : En d'autres termes, on peut dire qu'un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle toutes les flèches sont inversibles, les morphismes de groupoïdes sont alors les foncteurs entre deux telles catégories.

§ 3. EXTENSION AUX PARTIES D'UN GROUPOÏDE.

Comme on l'a fait dans l'exemple du § 1, on peut définir sur $\mathscr{P}(\Gamma)$ une opération qui en fait un demi-groupe unitaire.

Si A et B sont deux parties de Γ, $A.B = m((A \times B) \cap \Gamma_2))$.

L'axiome d'associativité implique l'associativité pour cette opération pour laquelle Γ_o est élément neutre.

Si on note A^{-1} l'ensemble des inverses des éléments de A, le produit $A.A^{-1}$ est l'ensemble des $y.x^{-1}$ avec $\alpha(y) = \beta(x^{-1}) = \alpha(x)$; si donc $\alpha|A$ est bijective $x = y$ et $y.x^{-1} = x.x^{-1}$ est dans Γ_o ; si de plus $\beta|A$ est bijective et si $u \in \Gamma_o$, $(\beta|A)^{-1}(u) = a \in A$ et $a.a^{-1} = \beta(a) = u$.
On a un calcul analogue pour $A^{-1}.A$.

DEFINITION 3.1 : *On appelle* <u>*bissection*</u> *une partie* A *de* Γ *pour laquelle les restrictions de* α *et* β *sont bijectives de* A *sur* Γ_o.

PROPOSITION 3.1 : *L'ensemble* $Gr(\Gamma)$ *des bissections d'un groupoïde* Γ *est un groupe.*

Les règles du calcul des sources et des buts montrent en effet que le produit de deux bissections en est une et Γ_o est l'élément neutre. $Gr(\Gamma)$ est le groupe des éléments inversibles du demi-groupe $\mathscr{P}(\Gamma)$. Le groupe $Gr(\Gamma)$ opère de façon naturelle sur Γ_o, à gauche et à droite par

$$A_o u = \beta((\alpha|A)^{-1}(u))$$
$$u_o A = \alpha((\beta|A)^{-1}(u)).$$

Ces actions ne sont pas en général effectives, par exemple $u_o A = u$ si et seulement si $(\alpha|A)^{-1}(u) \in \Gamma_u \cap A$; par contre $Gr(\Gamma)$ agit de façon effective sur Γ par deux actions, l'une à droite et l'autre à gauche, commutantes entre elles, définies par :

$$A_\ell(x) = A.x = (\alpha|_A)^{-1}(\beta(x)).x$$
$$A_r(x) = x.A = x.((\beta|_A)^{-1}(\alpha(x)).$$

L'action est effective car si $A.x = x$ pour tout x et si $a \in A$,

$$a = a.\alpha(a) = A.\alpha(a) = \alpha(a) \text{ donc } a \in \Gamma_o.$$

REMARQUE : Ces opérations sont des cas particuliers de la multiplication sur l'ensemble des parties de Γ car $A.x = A.\{x\}$ et $x.A = \{x\}.A$.

PROPOSITION 3.2 : *L'application α (resp. β) de Γ dans Γ_o est invariante par l'action à gauche (resp. à droite) de $Gr(\Gamma)$ et équivariante pour les actions à droite (resp. à gauche) de $Gr(\Gamma)$ sur Γ et Γ_o.*

En d'autres termes :

$$\alpha(A.x) = \alpha(x) \quad \text{et} \quad \alpha(x.A) = \alpha(x).A$$
$$\beta(x.A) = \beta(x) \quad \text{et} \quad \beta(A.x) = A.\beta(x) .$$

§ 4. GROUPOÏDES DE LIE

DEFINITION 4.1 : *Un groupoïde de Lie Γ , est une variété différentielle (peut-être non séparée) munie d'une structure de groupoïde telle que :*

1°) L'ensemble Γ_o des unités est une sous-variété séparée .

2°) Les applications α et β sont différentiables et sont des submersions.

3°) La multiplication est une application différentiable de Γ_2 dans Γ (il résulte de 2°) que Γ_2 est une sous-variété de $\Gamma \times \Gamma$).

4°) L'application $x \to x^{-1}$ est un difféomorphisme de Γ sur lui-même.

On dira que le groupoïde de Lie est transitif si l'application $\alpha \times \beta : \Gamma \to \Gamma_o \times \Gamma_o$ est une submersion surjective.

N.B. - La terminologie traditionnelle réserve le nom de groupoïde aux groupoïdes appelés ici transitifs. Cette modification de l'usage sera justifiée plus loin.

DEFINITION 4.2 : *On dit qu'un groupoïde est* *α-connexe* *si les α-fibres sont connexes (par 4 les β fibres le sont alors également).*

On appelle composante α-connexe de Γ, et on note Γ_α, la réunion des composantes connexes des points de Γ_o dans les α-fibres de Γ.

Une notion étroitement liée à celle de groupoïde est celle de feuilletage de Stefan.

DEFINITION 4.3 : *Une distribution* C^∞ D *sur une variété* M, *au sens de Sussmann [Su. 1973], est la donnée pour tout* x_o *de* M *d'un sous-espace* D_{x_o} *de* $T_{x_o}M$ *tel que : il existe un nombre fini* k_o, *dépendant de* x_o, *de champ de vecteurs* C^∞ *de* M, $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant k_o}$, *tels que* D_{x_o} *soit engendré par les vecteurs* $(X_i(x_o))_{1\leqslant i\leqslant k_o}$ *et que pour tout* x *de* M, $X_i(x) \in D_x$.

DEFINITION 4.4 : *Un* *feuilletage de Stefan* *[St 1974] est une distribution* C^∞ D *de* M *vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes qui constituent le théorème de Frobenius-Sussmann [Su, 1973] (cf. [D 1985] également).*

(1) Par tout point il passe une variété intégrale S *de* D *(i.e. telle que* $\forall x \in S\ T_xS = D_x$ *) maximale unique.*

(2) Il existe une sous-algèbre de Lie g *de* Sect(M,TM) *telle que*

a) $\forall x \in M\ D_x = g(x)$ *ensemble des valeurs en* x *des champs appartenant à* g.

b) g *est "complète", i.e. pour tout champ* $X \in g$ *de flot* φ_t, *pour tout champ* $Y \in g, \varphi_{t_*} Y$ *est un champ local de* g.

Si g_o désigne la sous-algèbre de Lie de g formée des champs à supports compacts, la condition (2) est équivalente à la condition $(2)_o$ portant sur g_o, sous la seule réserve que pour tout x, $g_o(x) \equiv g(x)$.

Enfin si S est la feuille de x_o, tout point x de S est atteignable par un produit de flots de champs de g (resp. g_o).

THEOREME 4.1 : [P 1985]

(i) La composante α-connexe Γ_α de Γ est un sous groupoïde ouvert de Γ. Les orbites de Γ_α dans Γ_o constituent un feuilletage de Stefan.

(ii) Pour toute unité u de Γ_o, le groupe d'isotropie Γ_u est un groupe de Lie.

(iii) Si Γ est α-connexe et si S_u est l'orbite de u, $u \in \Gamma_o$, $\beta : \bar{\alpha}^1(u) \to S_u$ (resp. $\alpha : \bar{\beta}^1(u) \to S_u$ est un Γ_u fibré principal pour l'action naturelle de Γ_u dans $\bar{\alpha}^1(u)$: $\Gamma_u \times \bar{\alpha}^1(u) \to \bar{\alpha}^1(u))(\gamma,x) \to x\gamma$; (resp. par l'action $\Gamma_u \times \bar{\beta}^1(u) \to \bar{\beta}^1(u)$ $(\gamma,x) \to \bar{\gamma}^1.x)$. En particulier $\bar{\alpha}^1(u)$ et $\beta^{-1}(u)$ sont des sous-variété <u>séparées</u> de Γ.

(iv) Γ est une variété <u>séparée</u> si et seulement si Γ_o est fermé dans Γ.

A la différence des groupes, les translations à droite et à gauche ne sont pas partout définies.

Si $x_o \in \Gamma$ on notera R_{x_o} l'application $y \to y.x_o$ de $\alpha^{-1}(\beta(x_o))$ dans $\alpha^{-1}(\alpha(x_o))$ qui est un difféomorphisme.

De même L_{x_o} : $y \to x_o.y$ est un difféomorphisme de $\beta^{-1}(\alpha(x_o))$ dans $\beta^{-1}(\beta(x_o))$.

Il est naturel d'introduire deux sous-algèbres de Lie de l'algèbre des champs C^∞ sur Γ :

$\mathscr{L}(\Gamma)$, algèbre de Lie des champs invariants à gauche, est constituée des champs X qui sont dans le noyau de $T\beta$ et tels que pour tout x_o , en restriction à la sous-variété $\beta^{-1}(\alpha(x_o))$

$$TL_{x_o}(X) = X o L_{x_o} .$$

$\mathscr{R}(\Gamma)$, algèbre de Lie des champs invariants à droite, est constituée des champs Y qui sont dans le noyau de $T\alpha$ et tels que pour tout x_o, en restriction à la sous-variété $\alpha^{-1}(\beta(x_o))$

$$TR_{x_o}(Y) = Y o R_{x_o} .$$

Les flots des champs de $\mathscr{L}(\Gamma)$ commutent aux translations à gauche, ceux de $\mathscr{R}(\Gamma)$ aux translations à droite. De ceci on déduit que, translation à gauche et à droite commutant, $[\mathscr{L}(\Gamma), \mathscr{R}(\Gamma)] \equiv 0$.

L'introduction de la notion d'algébroïde de Lie due à Pradines [P 1976] va clarifier les analogies entre groupes et groupoïdes de Lie et justifier la terminologie adoptée.

DEFINITION 4.5 : *Un algébroïde de Lie sur une variété* M *est un triplet constitué d'un fibré vectoriel* C^∞ *de base* $M : E \to M$ *, d'une structure de* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie sur l'espace des sections* C^∞ *de* E, $\mathrm{Sect}(M,E)$ *, dont on note* [,] *le crochet, et d'un morphisme* ρ *de fibrés vectoriels* C^∞ *de* E *dans* TM *tels que :*

(i) l'application induite entre sections :

$\tilde{\rho} : \mathrm{Sect}(M,E) \to \mathrm{Sect}(M,TM)$ *est un morphisme d'algèbres de Lie.*

(ii) pour toute fonction $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$*, pour tout couple* (X,Y) *de sections* C^∞ *de* E,

$$[X,fY] = f[X,Y] + (\tilde{\rho}(X).f)Y.$$

On montre [P. 1967] que la sous-algèbre de Lie $\tilde{\rho}(\mathrm{Sect}(M,E))$ de $\mathrm{Sect}(M,TM)$ définit un feuilletage de Stefan.

Un algébroïde de Lie est <u>transitif</u> s'il n'a qu'une seule feuille : c'est le cas de l'algébroïde de Lie canoniquement associé à un G-fibré principal sur une variété M connexe, $E(G) \xrightarrow{\pi} M$. Si $\mathscr{E}$ désigne le fibré vectoriel de base M quotient de TE(G) par l'action à droite de G, $\mathscr{E}$ équipé du crochet des champs invariants à droite et de $T\pi : \mathscr{E} \to TM$ est un algébroïde de Lie transitif. [P. 1967].

Si $\Gamma \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ est un groupoïde de Lie, les sous-algèbres de Lie $\mathscr{L}(\Gamma)$ et $\mathscr{R}(\Gamma)$ de $\mathrm{Sect}(\Gamma,T\Gamma)$ vont permettre d'associer à Γ deux algébroïdes de Lie opposés.

Soit E_α le fibré vectoriel sur Γ_o dont les fibres sont les noyaux de $T\beta|_{T_\gamma\Gamma}$ $\mathscr{L}(\Gamma)$ étant constitué de champs invariants à gauche, $\mathscr{L}(\Gamma)$ est isomorphe à $\mathrm{Sect}(\Gamma_o,E_\alpha)$ qui est donc muni ainsi d'une structure d'algèbre de Lie locale. D'autre part, par construction même, tout champ $X \in \mathscr{L}(\Gamma)$ est α-projetable et d'image $T\alpha(X|_{\Gamma_o})$. On vérifie aisément la condition (ii) sur $\mathrm{Sect}(\Gamma_o,E_\alpha)$. $\mathscr{L}(\Gamma)$ permet donc de munir E_α

d'une structure d'algébroïde de Lie. Mais β étant une submersion, E est canoniquement isomorphe au fibré normal $\nu\Gamma_o$ de Γ_o dans Γ. Par transport de structure sur $\nu\Gamma_o$ on a donc prouvé, en notant α par abus de notation l'application de $\nu\Gamma_o \to TM$ déduite de l'isomorphisme $\nu\Gamma_o \simeq E_\alpha$.

PROPOSITION 4.1. [P 1985] : $(\nu\Gamma_o \to \Gamma_o, \alpha)$ *est une algébroïde de Lie sur* Γ_o *pour la structure d'algèbre de Lie sur* $\mathrm{Sect}(\Gamma_o, \nu\Gamma_o)$ *déduite de* $\mathscr{L}(\Gamma)$, *appelé algébroïde de Lie de* Γ.

On aurait pu - comme pour les groupes de Lie - utiliser les champ invariants à droite $\mathscr{R}(\Gamma)$ et le fibré E_β dont les fibres sont les noyaux de $T\alpha|_{T_{\Gamma_o}\Gamma}$. L'isomorphisme de fibrés vectoriels sur Γ_o : $\nu\Gamma_o \simeq E_\beta$ munirait $\nu\Gamma_o$ d'une deuxième structure d'algébroïde de Lie qui est opposée à la précédente : en effet si X,Y sont deux sections de $\nu\Gamma_o$, dont on note (X_α, Y_α) (resp. X_β, Y_β) les relèvements à E_α (resp. E_β) $X = \nu X_\alpha = \nu X_\beta$ et $Y = \nu Y_\alpha = \nu Y_\beta$ où $\nu : T_{\Gamma_o}\Gamma \to \nu\Gamma_o$; en résulte que $\nu[X_\alpha - X_\beta, Y_\alpha - Y_\beta] = 0$ et comme $[\mathscr{L}(\Gamma), \mathscr{R}(\Gamma)] = 0$, $\nu[X_\alpha, Y_\alpha] + \nu[X_\beta, Y_\beta] = 0$, ce qui achève la démonstration.

Le feuilletage de Stefan associé à l'algébroïde de Lie de Γ est le feuilletage par les orbites de Γ_α dans Γ_o. Si S est une telle feuille, $\alpha : \nu_S\Gamma_o \to TS$ est un morphisme surjectif de fibrés vectoriels. On suppose, pour simplifier l'écriture, Γ α-connexe. Soit $u \in S$, $\alpha : \bar{\beta}^1(u) \to S$ est un Γ_u fibré principal auquel est associé un algébroïde de Lie transitif dont par construction même la structure est la restriction à S de la structure d'algébroïde de E_α , ce qui montre que $(\nu_S\Gamma_o, \alpha)$ est l'algébroïde de Lie de $\alpha : \bar{\beta}^1(u) \to S$.

On a alors au-dessus de S une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow I_S \longrightarrow \nu\Gamma_S \longrightarrow TS \longrightarrow 0$$

où I_S est un fibré en algèbres de Lie de fibre type l'algèbre de Lie opposée de G_u. Une telle suite exacte est appelée suite d'Atiyah abstraite par Pradines. [P. 1967] [Al. Mo.1985].

REMARQUE :A l'inverse de ce qui se passe pour les groupes et algèbres de Lie de dimension finie, il n'y a pas en général de groupoïde de Lie associé à un algèbroïde de Lie même dans le cas transitif. Le chapitre III sera précisément consacré à un troisième théorème de Lie local pour certains algébroïdes de Lie.

§ 5. EXEMPLES DE GROUPOÏDES.

a) Si M est une variété différentielle, $M \times M$ avec sa structure de groupoïde grossier et la structure de variété produit est un groupoïde de Lie.

b) Groupoïde transformationel : Soit Γ un groupoïde de Lie, E une variété différentielle et J une submersion C^∞ de E dans les unités Γ_o de Γ.

Soit H le produit fibré $\Gamma \underset{\Gamma_o}{\times} E = \{(g,x) \in \Gamma \times E \ / \ \alpha(g) = J(x)\}$.

On dit que Γ agit sur E si on s'est donné une application φ de H dans E telle que :

a) $J(\varphi(g,x)) = \beta(g)$.

b) Si $(g_1,g_2) \in \Gamma_2$, $\varphi(g_1,\varphi(g_2,x)) = \varphi(g_1.g_2,x)$

g définit donc une application C^∞ de $J^{-1}(\alpha(g))$ dans $J^{-1}(\beta(g))$ et si $\alpha(g_1) = \beta(g_2)$ $g_1.g_2$ est la transformation composée

$$J^{-1}(\alpha(g_2)) \xrightarrow{g_2} J^{-1}(\beta(g_2)) = J^{-1}(\alpha(g_1)) \xrightarrow{g_1} J^{-1}(\beta(g_1))$$

Ceci revient à munir H d'une structure de groupoïde de Lie, d'ensemble d'unités E , avec les applications $\alpha_H(g,x) = x$ et $\beta_H(g,x) = \varphi(g,x)$ et telle que l'injection de H dans $\Gamma \times (E \times E)$: $(g,x) \longrightarrow (g,gx,x)$ fasse de H un sous-groupoïde ($E \times E$ ayant la structure de groupoïde grossier).

En particulier, si G est un groupe qui opère à gauche sur X, $\Gamma = G \times X$ a une structure naturelle de groupoïde d'unité $\Gamma_o = \{e\} \times X$; $\alpha(g,x) = (e,x)$ et $\beta(g,x) = (e,gx)$ sont les projections source et but. Le produit $(g_2,x_2).(g_1,x_1)$ est défini si $x_2 = g_1x_1$ et vaut (g_2g_1,x_1).

Par exemple l'action coadjointe d'un groupe de Lie sur le dual de son algèbre de Lie donne, par la construction précédente, une structure de groupoïde au fibré cotangent du groupe de Lie, structure que l'on retrouvera plus loin (chapitre II, n° 4) par une autre voie. La structure de groupoïde sur $G \times X$ est principale si l'opération de G sur X est libre.

c) Groupoïdes de Jauge : Soit (E,M,π) une fibration principale, de groupe structural H. L'espace $\mathscr{H}$ quotient de $E \times E$ par la relation d'équivalence définie par $(z_1,z_1') \sim (z_2,z_2')$ s'il existe h dans H tel que $z_2 = z_1h$ et $z_2' = z_1'.h$ est muni

d'une structure de groupoïde de Lie (transitif), l'espace des unités $\mathscr{H}_0$ (quotient de la diagonale de $M \times M$ par $\sim$) est isomorphe à M. C'est le groupoïde des isomorphismes, fibre sur fibre, H-équivariants ([E.oc],[Lib 1972]).

d) Le groupoïde fondamental d'une variété différentielle :

$\Pi(X)$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixes) de chemins d'un espace topologique X, si $[\gamma] \in \Pi(X)$, on pose $\beta([\gamma]) = \gamma(0)$ $\alpha([\gamma]) = \gamma(1)$, les unités sont les chemins constants (identifiés aux points de X), la multiplication étant celle déduite de la juxtaposition des chemins et la topologie, la topologie quotient de celle de l'espace des chemins (topologie compacte-ouverte).

Si de plus X est une variété différentielle connexe par arcs, l'application $[\gamma] \to (\gamma(0),\gamma(1))$ de $\Pi(X)$ dans $X \times X$ est un revêtement ; on peut donc munir $\Pi(X)$ d'une structure de variété différentielle qui en fait un groupoïde différentiel de Lie.

REMARQUE : le groupe d'isotropie d'un point x de X est le groupe de Poincaré de X.

e) Groupoïdes d'homologie :

On peut dans l'exemple précédent, remplacer la relation d'équivalence d'homotopie par celle, moins fine d'homologie, on obtient ainsi une suite de groupoïdes de Lie :

$$\Pi(X) \to \mathscr{H}(X) \longrightarrow X \times X$$

Ces trois groupoïdes ayant X comme ensemble d'unités.

Les exemples suivants sont des cas de la variété sous-jacente est non séparée.

f) Les groupoïdes de germes :

Si X est une variété différentielle, l'ensemble des germes de difféomorphismes de X dans elle-même est muni d'une structure de groupoïde de Lie quand on le munit de la topologie usuelle des germes (cf. [Ha. 1984]).

g) Groupoïdes d'holonomie d'un feuilletage :

Supposons que l'on ait sur la variété différentielle X un feuilletage $\mathcal{F}$. Considérons dans X les chemins γ, chaque chemin étant contenu dans une feuille, deux chemins γ_1 et γ_2 de même origine et de même extrémité seront équivalents si $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ est sans holonomie ; le quotient $\mathcal{H}ol(X, \mathcal{F})$ est le groupoïde d'holonomie (ou le graphe) du feuilletage $\mathcal{F}$; les applications source et but et la multiplication sont définies comme dans l'exemple d) ; un voisinage d'un élément $[\gamma]$ est constitué des éléments $[\gamma^1]$ représentés par des chemins γ' voisins de γ. Avec cette topologie $\mathcal{H}ol(X, \mathcal{F})$ est une variété, en général non séparée, de dimension égalc à la somme de la dimension de X et de la dimension des feuilles. On peut éssocier à un feuilletage d'autres groupoïdes différentiels, cf. [P. 1966],[Ha.1984], [C. 1982].

CHAPITRE II

Groupoïdes symplectiques

§ 1 - DEFINITIONS.

Dans toute la suite si (Γ,σ) est une variété sumplectique on la notera simplement Γ, $(-\Gamma)$ désignera alors la variété symplectique $(\Gamma,-\sigma)$. Dans les démonstrations nous utiliserons les résultats classiques du calcul lagrangien pour lesquels nous renvoyons à l'appendice.

DEFINITION 1.1 : *Un groupoïde symplectique est la donnée d'un groupoïde différentiel Γ muni d'une 2-forme symplectique σ telle que le graphe γ_m de la multiplication soit une sous-variété lagrangienne de $(-\Gamma) \times \Gamma \times \Gamma$. Rappelons que notre convention d'écriture des graphes est que $(z,x,y) \in \gamma_m$ si et seulement si $z = x.y$.*

PROPOSITION 1.1 : *Si Γ est un groupoïde symplectique, l'ensemble des unités Γ_o est une sous-variété lagrangienne de Γ et l'inversion i est un isomorphisme antisymplectique de Γ dans lui-même (c'est-à-dire un isomorphisme symplectique de Γ dans $(-\Gamma)$).*

DEMONSTRATION : Γ_o est l'ensemble des z de Γ pour lesquels on peut trouver un x dans Γ tel que $(x,x,z) \in \gamma_m$; en d'autres termes Γ_o est l'image de la diagonale Δ_Γ par la relation canonique de $(-\Gamma) \times \Gamma$ dans Γ définie par la sous-variété lagrangienne γ_m et dans $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ les sous-variétés $\gamma_m \times \Delta_\Gamma$ et $\Gamma \times \Delta$ se coupent proprement (Δ est ici l'ensemble des quadruplets (u,v,u,v) de $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$). Le résultat vient alors du calcul lagrangien .

De la même manière, le graphe γ_i de l'inversion est l'ensemble des couples (x,y) de $\Gamma \times \Gamma$ pour lesquels il existe un z dans Γ_o tel que $(z,x,y) \in \gamma_m$, c'est donc l'image de Γ_o par la relation canonique de $(-\Gamma)$ à $\Gamma \times \Gamma$ définie par la sous-variété lagrangienne γ_m .

PROPOSITION 1.2 : *Si A est une bissection lagrangienne dans un groupoïde* Γ, *les applications* A_ℓ *et* A_r *(cf. I.3) sont symplectiques.*

DEMONSTRATION : Le graphe γ_{A_ℓ} de A_ℓ est constitué des couples (z,y) pour lesquels il existe un x dans A tel que $(z,x,y) \in \gamma_m$. C'est donc l'image de A (qui est lagrangienne) par la relation canonique de Γ à $(-\Gamma) \times \Gamma$ définie par γ_m , d'où le résultat ; la démonstration est la même pour A_r.

Dans la suite, la notation $Gr(\Gamma)$ ne sera utilisée que pour les bissections lagrangiennes.

On notera $\mathcal{G}(\Gamma)$ l'ensemble des bissections locales lagrangiennes. Si $A \in \mathcal{G}(\Gamma)$, α et β sont des difféomorphismes de A sur des ouverts de Γ_o. Les opérations A_ℓ et A_r sont définies par les mêmes formules quand elles ont un sens (mais $\mathcal{G}(\Gamma)$ n'est évidemment plus un groupe) et sont encore symplectiques.

Si $x \in \Gamma$, il passe toujours par x une section lagrangienne locale transverse à l'α-fibre et à la β-fibre en x ; mais en général il n'existe pas de bissection lagrangienne globale passant par x sauf si x est assez proche de la sous-variété lagrangienne Γ_o (ceci résulte alors de l'existence du "voisinage tubulaire lagrangien" de Γ_o (cf.[W. 1979])).

PROPOSITION 1.3 : *Les orbites de l'action à gauche (resp. à droite) de* $Gr(\Gamma)$ *dans* Γ *sont des réunions de composantes connexes des* α*-fibres (resp. des* β*-fibres).*

DEMONSTRATION : On remarque d'abord que ql'opération à gauche (resp. à droite) de $GR(\Gamma)$ laisse invariante chaque α-fibre (resp. β-fibre). Il suffit de montrer que les orbites sont ouvertes ; si donc y est proche de x dans la même α-fibre, $\beta(y^{-1}) = \alpha(y) = \alpha(x)$ donc $x.y^{-1}$ est défini et $z = x.y^{-1}$ est proche de $x.x^{-1}$ donc de Γ_o , il passe donc par z une section lagrangienne A et, puisque $x = z.y$, $x = A.y$ et donc x et y sont sur la même orbite.

REMARQUE 1 : La proposition 1.3 subsiste lorsqu'on ne considère que les sous-variétés lagrangiennes obtenues par déformations exactes de Γ_o.

REMARQUE 2 : Il résulte de la démonstration que les actions de $\mathcal{G}(\Gamma)$ sont transitives sur l'α-fibre pour l'action à gauche et sur la β-fibre pour l'action à droite. Il en est de même pour $Gr(\Gamma)$ si Γ est α-connexe.

COROLLAIRE : *Les feuilletages définis par les α-fibres et les β-fibres sont symplectiquement orthogonaux.*

DEMONSTRATION : Soit u une unité, X un vecteur tangent à l'α-fibre en u , Y un vecteur tangent à la β-fibre en u, si $x(t)$ est une courbe de Γ avec $\alpha(x(t)) = u$ et $x'(o) = X$, la courbe $(x(t),x(t),u)$ est une courbe tracée dans le graphe γ_m de vecteur tangent en o $(X,X,0)$; de même si $y(t)$ est une courbe dans la β-fibre avec $y'(o) = Y$, la courbe $(y(t),u,y(t))$ est une courbe tracée dans le graphe γ_m de vecteur tangent en o $(Y,0,Y)$. Puisque γ_m est lagrangien ces deux vecteurs sont symplectiquement orthogonaux, donc : $\sigma(X,Y) - \sigma(X,0) - \sigma(0,Y) = 0 = \sigma(X,Y)$. Si maintenant X et Y sont tangents à l'α-fibre et à la β-fibre en un point x quelconque, on peut les ramener par l'action d'un élément de $\mathcal{G}(\Gamma)$ donc en gardant la valeur de $\sigma(X,Y)$, en un point de Γ_o.

Une paire duale [W. 1983] sur une variété symplectique (M,σ) est un couple de deux applications $(\Pi_i : M \to P_i), i=1,2)$ telles que pour tout $x \in M$, $\mathrm{Ker}T_x\Pi_1 = (\mathrm{Ker}T_x\Pi_2)^\sigma$. On a donc prouvé, compte tenu des dimensions.

COROLLAIRE : (α,β) *constituent une paire duale sur Γ. Les fonctions sur Γ constantes sur les α-fibres (notées $\alpha^*C^\infty(\Gamma_o)$) et celles constantes sur les β-fibres (notées $\beta^*C^\infty(\Gamma_o)$) commutent. En particulier si Γ est α-connexe, $\alpha^*C^\infty(\Gamma_o)$ (resp. $\beta^*C^\infty(\Gamma_o)$) est le commutateur de $\beta^*C^\infty(\Gamma_o)$ (resp. $\alpha^*C^\infty(\Gamma_o)$)..*

THEOREME 1.1 *Γ_o est muni naturellement d'une structure de Poisson pour laquelle les applications α et β sont respectivement des morphisme de Poisson et d'anti-Poisson (c'est-à-dire de Poisson lorsqu'on place sur Γ_o la structure opposée). On note Λ_o le tenseur de Poisson de Γ_o.*

DEMONSTRATION : Si f et g sont deux éléments de $\alpha^*(C^\infty(\Gamma_o))$, pour toute fonction h de $\beta^*(C^\infty(\Gamma_o))$ on a $\{f,h\} = 0 = \{g,h\}$, donc $\{\{f,g\},h\} = 0$ $\{f,g\}$ est donc constante le long des orbites de ξ_h , le champ hamiltonien associé à h. Mais ces orbites décrivent toutes les α-fibres dans un voisinage de Γ_o et $\mathcal{G}(\Gamma)$ permet de ramener la situation générale dans ce voisinage.

COROLLAIRE : *Si Γ est α-connexe, les orbites de Γ dans Γ_o constituent le feuilletage symplectique de Γ_o.*

- On retrouve dans ce cas le théorème de Pradines (cf. I.4.1)
- Si Γ n'est pas α-connexe, les orbites de Γ sont des réunions de feuilles symplectiques de Γ_o.

EXEMPLE : Si T^*G est le groupoïde cotangent d'un groupe de Lie (cf. I.5 exemple b), la structure de Poisson dont se trouve munie $\underline{G}^*$, qui est l'espace des unités de T^*G , est sa structure canonique de dual d'algèbre de Lie (structure de Lie-Poisson) et les orbites de T^*G dans $\underline{G}^*$ sont les orbites coadjointes de G.

REMARQUE : Si A est une bissection (locale) lagrangienne, il existe deux difféomorphismes (locaux) ψ_ℓ et ψ_r de Γ_o qui sont des morphismes de Poisson et qui rendent commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "A_\ell"] \arrow[d, "\beta"] & \Gamma \arrow[d, "\beta"] \\ \Gamma_o \arrow[r, "\psi_\ell"] & \Gamma_o \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "A_r"] \arrow[d, "\alpha"'] & \Gamma \arrow[d, "\alpha"] \\ \Gamma_o \arrow[r, "\psi_r"] & \Gamma_o \end{tikzcd}$$

2. ALGEBROÏDES DE LIE D'UN GROUPOÏDE SYMPLECTIQUE.

$\Gamma \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ étant un groupoïde symplectique le fibré normal de Γ_o , $\nu\Gamma_o$ s'identifie canoniquement à $T^*\Gamma_o$: si $X \in T_{\Gamma_o}\Gamma$, $-\iota_X\sigma|_{\Gamma_o}$ ne dépend que de νX et définit l'isomorphisme cherché. Il est donc naturel dans ce cas de transporter la structure d'algébroïde sur $T^*\Gamma_o$. Pour ceci on a besoin du lemme suivant :

LEMME : $X \in \mathscr{L}(\Gamma)$ *(X est un champ invariant à gauche de Γ) si et seulement si* $-\iota_X\sigma = \alpha^*\omega$ *où* $\omega \in \mathrm{Sect}(\Gamma_o, T^*\Gamma_o)$.

En particulier si $-\iota_X\sigma = \alpha^* df$, $f \in C^\infty(\Gamma_o,\mathbb{R})$ X est un champ invariant à gauche.

<u>DEMONSTRATION DU LEMME</u> : Le lemme étant de nature "locale", il suffit de se placer sur sur un ouvert de la forme $\bar{\alpha}^1(U)$ où U est un voisinage de $u_o \in \Gamma_o$ de coordonnées locales $(x^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Si X^i est le champ sur $\alpha^{-1}(U)$ défini par $-\iota_{X^i}\sigma = \alpha^* dx^i$ et si l'on prouve que X^i est invariant à gauche, il en résulte que sur U il existe n fonctions a_i telles que $X = \sum_1^n \alpha^* a_i . X^i$, ce qui équivaut à $-\iota_X\sigma = \alpha^*\omega$ avec $\omega = \sum_1^n a_i dx^i$.

Tout revient donc à prouver que pour toute fonction $f \in C^\infty(\Gamma_o,\mathbb{R})$, le champ X de hamiltonien $\alpha^* df$ est invariant à gauche. Par construction même $X \in (\mathrm{Ker}T_\alpha)^\sigma = \mathrm{Ker}T\beta$. Il ne reste donc qu'à vérifier que $TL_{x_o}.X = X_o L_{x_o}$ pour tout x_o ce qui se fait en prenant une bissection lagrangienne locale A passant par x_o. A_ℓ étant une transformation symplectique, X sera invariant par A_ℓ si et seulement si $\alpha^* f$ l'est ce qui est trivial. La preuve du lemme est complète.

La structure d'algèbre de Lie de $\mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ dont le crochet est noté $\{,\}$ s'obtient alors à partir de celle de $\mathscr{L}(\Gamma)$ en posant pour tout couple (ω_1,ω_2) de 1-forme sur $T^*\Gamma_o$, $\{\omega_1,\omega_2\} = \omega$ où

$$\begin{cases} -\iota_{[X_1,X_2]}\sigma = \alpha^*\omega \\ -\iota_{X_1}\sigma = \alpha^*\omega_1 \ , \ -\iota_{X_2}\sigma = \alpha^*\omega_2 \end{cases} .$$

De la relation $\mathscr{L}_{X_1}\iota_{X_2}\sigma = \iota_{[X_1,X_2]}\sigma + \iota_{X_2}\mathscr{L}_{X_1}\sigma$ on déduit la forme explicite du crochet :

$$\alpha^*\{\omega_1,\omega_2\} = \iota_{X_1}\alpha^* d\omega_2 - \iota_{X_2}\alpha^* d\omega_1 + d(\sigma(X_1,X_2))$$

or $T\alpha(X_i) = \zeta_i$ où $\zeta_i = \Lambda_o^\#(\omega_i)$.

Ceci permet d'écrire

$$(1) \qquad \{\omega_1,\omega_2\} = \iota_{\Lambda_o^\#(\omega_1)} d\omega_2 - \iota_{\Lambda_o^\#(\omega_2)} d\omega_1 + d(\iota_{\Lambda_o}(\omega_1\wedge\omega_2)).$$

D'autre part le morphisme noté par abus de notation α de $\nu\Gamma_o$ dans Γ_o se transforme en le morphisme $\Lambda_o^{\#}$ de $T^*\Gamma_o$ dans $T\Gamma_o$.

On a donc prouvé :

PROPOSITION 2.1 : *Si* $(\Gamma,\sigma) \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ *est un groupoïde symplectique son algébroïde de Lie est canoniquement isomorphe au triplet* $(T^*\Gamma_o,\Lambda^{\#},\{,\})$ $\{,\}$ *étant le crochet sur les 1-formes donné par (1). De plus* $d : C^\infty(\Gamma_o,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ *est un homomorphisme d'algèbres de Lie.*

La deuxième partie de la proposition résulte immédiatement de la formule (1) qui implique également que $Z^1\mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ sous-espace vectoriel des 1-formes fermées est une sous-algèbre de Lie dont l'idéal dérivée contient $dC^\infty(\Gamma_o,\mathbb{R})$.

§ 3 - PREMIERS EXEMPLES.

3.1. Si M est une variété symplectique, la structure de groupoïde grossier sur $-M \times M$ donne un premier exemple de groupoïde symplectique, Γ_o est la diagonale, et le crochet de Poisson pour les fonctions α-invariantes est leur crochet comme fonctions sur Γ_o. les α-sections sont les graphes des applications de M dans M. Dans cet exemple les feuilletages définis par α et β sont transverses.

Etant donné un hamiltonien $h : M \to \mathbb{R}$, le relèvement de son flot à $-M \times M$ est engendré par le hamiltonien $H(x,y) = -h(x) + h(y)$ de $-M \times M$ dans R.

3.2. Considérons maintenant le groupoïde fondamental $\Pi(M)$ d'une variété symplectique M. L'application naturelle (qui est un morphisme de groupoïdes et un revètement) de $\Pi(M)$ dans $-M \times M$ fait de $\Pi(M)$ un groupoïde symplectique.

THEOREME 3.1 : *Toute action symplectique sur* M *d'un groupe de Lie se relève en une action sur* $\Pi(M)$ *fortement hamiltonienne (c'est-à-dire admettant une application moment* ad^**-équivariante).*

REMARQUE : On a le même résultat pour le groupoïde d'homologie $\mathscr{H}(M)$.

DEMONSTRATION : En fait le groupe des difféomorphismes symplectiques de M, Symp(M), se relève naturellement en un groupe d'actions fortement hamiltonienne de M. Soit $\mathscr{H}_{loc}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs localement hamiltoniens de M considérée comme algèbre de Lie de Symp(M). La représentation adjointe étant donnée par $\varphi, X \to Ad_\varphi X \quad Ad_\varphi X(x) = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$:

Si $X \in \mathscr{H}_{loc}(M)$ il se relève naturellement en $\tilde{X}$ champ C^∞ sur $\Pi(M)$. Si σ est la forme symplectique de M, $\tilde{\sigma}$ celle de $\Pi(M)$, $\Pi : \Pi(M) \to -M \times M$, $\tilde{\sigma} = \Pi^*(-\sigma,\sigma)$.

Soit $H_X : \Pi,M \to \mathbb{R}$ la fonction $[\gamma] \to \int_\gamma \iota_X\sigma$

$dH = \beta^*\theta - \alpha^*\theta$ si $\theta = \iota_X\sigma$

ce qui assure que $\iota_{\tilde{X}}\tilde{\sigma} = -dH$. $\tilde{X}$ est donc hamiltonien et on associe à l'action naturelle de Symp(M) dans $\Pi(M)$ le moment $J : \Pi(M) \to (\mathscr{H}_{loc}(M))'$

$$[\gamma] \to J[\gamma]$$

$$< J[\gamma],X> = \int_\gamma \iota_X\sigma$$

$(\mathscr{H}_{loc}(M))'$ étant, par exemple, le dual de $\mathscr{H}_{loc}(M)$ pour la topologie compacte ouverte.

Il est immédiat que pour tout $\varphi \in$ Symp(M)

$$J(\varphi[\gamma]) = Ad^*_\varphi J[\gamma]$$

L'action est donc fortement hamiltonnienne. Si G est un groupe de Lie agissant de façon symplectique sur M le résultat se déduit alors de l'inclusion $G \hookrightarrow$ Symp(M).

REMARQUE : $H_X : \Pi(M) \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupoïdes. La proposition suivante constitue en quelque sorte une réciproque.

PROPOSITION 3.1 : *Soit* $H : \Gamma \to \mathbb{R}$ *un hamiltonien sur un groupoïde symplectique* Γ. *Le flot de* H *est constitué d'automorphismes de groupoïdes si et seulement si* H *est un homomorphisme modulo les fonctions localement constantes. (C'est-à-dire si la fonction :* $K(x,y) = -H(x.y) + H(x) + H(y)$ *est localement constante sur* Γ_2*).*

DEMONSTRATION : Le flot de H se relève sur $(-\Gamma) \times \Gamma \times \Gamma$ en le flot engendré par $K(z,x,y) = -H(z) + H(x) + H(y)$. Dire que le flot de H agit par automorphismes de groupoïdes c'est dire que son relevé laisse invariant le graphe γ_m de la multiplication, soit puisque ce graphe est lagrangien, que K est localement constante sur γ_m.

REMARQUE : $\Gamma_2 = \bigcup_{u \in \Gamma_o} \bar{\alpha}^1(u) \times \bar{\beta}^1(u) \subset \Gamma \times \Gamma$. Γ_2 est donc connexe si Γ est α-connexe et Γ_o connexe. Dans ce cas si le flot de H est constitué d'automorphismes de groupoïde, on peut en modifiant H par l'addition d'une constante, en faire un morphisme de groupoïdes de Γ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, modulo les constantes, les hamiltoniens donnant naissance à des automorphismes de groupoïde sont les morphismes de groupoïdes de Γ dans $\mathbb{R}$ si Γ est α-connexe et Γ_o connexe.

Remarquons que pour tout H qui engendre un flot d'automorphismes de groupoïdes, le flot induit sur Γ_o est un flot d'automorphismes de Poisson pour la structure de Poisson définie sur Γ_o mais, en général non hamiltonien ; il est hamiltonien si $H(x,y)$ est de la forme $\alpha^* h(x) - \beta^* h(y)$, auquel cas le flot de H est le relèvement naturel du flot de Poisson de h sur Γ_o. Réciproquement si H est un morphisme de groupoïdeset si le flot induit sur Γ_o est hamiltonien de hamiltonien h , $H - \alpha^* h$ est constant sur les composantes connexes des β-fibres ; en effet si X_H est le champ hamiltonien associé à h, ζ le champ hamiltonien de h sur la variété de Poisson Γ_o , il résulte de ce que le flot de X_H est un flot d'automorphisme de Γ que $T\alpha(X_H) = \zeta_o\alpha$ $T\beta(X_H) = \zeta_o\beta$. Si Γ est α-connexe, $(H-\alpha^* h)(x) = -h(\beta(x))$ car $H|_{\Gamma_o} = 0$ ce qui assure que $H = \alpha^* h - \beta^* h$.

3.3. Cotangent d'une variété - Si M est une variété, $p : T^*M \to M$ étant un fibré vectoriel est un groupoïde de Lie pour l'addition dans les fibres. Le graphe de l'addition est l'ensemble des (ζ, ξ, η) tels que $-\zeta + \xi + \eta = o$. C'est donc l'image dans $-T^*M \times T^*M \times T^*M$ du fibré normal de la diagonale Δ de M^3 dans $(T^*M)^3$ par l'application $\psi : (\zeta, \xi, \eta) \to (-\zeta, \xi, \eta)$. Le fibré normal de Δ étant une sous-variété lagrangienne de $(T^*M)^3$ et l'application ψ étant un isomorphisme symplectique de $(T^*M)^3$ sur $(-T^*M) \times T^*M \times T^*M$, le graphe de l'addition dans T^*M est une sous-variété lagrangienne ce qui montre que T^*M est canoniquement un groupoïde symplectique. La structure de Poisson induite sur M est évidemment triviale.

De l'étude de 3.2 il résulte que les hamiltoniens qui conservent cette structure de groupoïde sont ceux qui sont linéaires sur les fibres, i.e. ceux canoniquement associés aux champs de vecteurs sur M. Si X est un tel champ sur M $\tilde{X} : \xi \to \langle X,\xi\rangle$ le hamiltonien sur T^*M associé et X^* le champ sur T^*M de hamiltonien $\tilde{X}$, X^* est le relèvement naturel de X à M, i.e. le champ dont le flot est la contragrédiente de la différentielle du flot de X. En particulier X^* est caractérisé par $\mathscr{L}_{X^*}\lambda = 0$, $T_pX^* = X$, où λ est la forme de Liouville.

§ 4 - COTANGENT D'UN GROUPOIDE.

Soit $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G_o$ un groupoïde de Lie ; l'objectif de ce paragraphe est d'exhiber sur $T^*G = \Gamma$, cotangent de G, une structure de groupoïde, distincte de celle construite en 3.c, pour laquelle Γ, muni de sa structure symplectique sera un groupoïde symplectique et la projection $p : \Gamma = T^*G \to G$ un morphisme de groupoïde. On note μ la multiplication dans G, γ_μ son graphe, G_2 l'ensemble des couples composables. L'isomorphisme symplectique ψ de $(T^*G)^3$ sur $(-T^*G) \times T^*G \times T^*G$ défini par

$$\psi(\zeta,\xi,\eta) = (-\zeta,\xi,\eta)$$

transforme le fibré conormal de γ_μ dans $(T^*G)^3$ en une sous-variété, nécessairement lagrangienne, γ_m de $(-T^*G \times T^*G \times T^*G)$. γ_m munira $T^*G = \Gamma$ d'une structure de groupoïde symplectique si et seulement si γ_m est le graphe d'une multiplication de groupoïde sur Γ. On va donc prouver que γ_m est un graphe et vérifier ensuite les axiomes des groupoïdes pour la loi ainsi définie.

μ étant une loi de groupoïde, il est immédiat que la loi sur TG, $\oplus$, définie par

$$(X,Y) \to X \oplus Y = T\mu_{(x_o,y_o)}(X,Y) \quad \text{pour } (X,Y) \in T_{(x_o,y_o)}G_2$$

est associative. (C'est d'ailleurs une loi de groupoïde !).

si $(z_o,x_o,y_o) \in \gamma_\mu$ et si $(\zeta,\xi,\eta) \in T^*_{z_o}G \times T^*_{x_o}G \times T^*_{y_o}G$ $(\zeta,\xi,\eta) \in \gamma_m$ si et seulement si

$$(*) \qquad \begin{cases} \langle\zeta, X \oplus Y\rangle = \langle\zeta,X\rangle + \langle\eta,Y\rangle \\ \\ \text{pour tout } (X,Y) \in T_{(x_o,y_o)}G_2 \ . \end{cases}$$

Pour expliciter cette condition on pose $u_o = \alpha(x_o) = \beta(y_o)$ et on note s_α (resp. s_β) une section locale de α (resp. β) telle que $s_\alpha(u_o) = x_o$ $s_\beta(u_o) = y_o$. Comme $(X,Y) \in T_{(x_o,y_o)}G_2$, $(T\alpha)X = (T\beta)Y = X_o \in T_{u_o}G_o$.

Il existe donc $X_1 \in \operatorname{Ker} T\alpha_{x_o}$ et $Y_1 \in \operatorname{Ker} T\beta_{y_o}$ tels que

$$\begin{cases} X = T_{u_o}s_\alpha(X_o) + X_1 \\ Y = T_{u_o}s_\beta(Y_o) + Y_1 \end{cases}$$

(s_α,s_β) est une section de la restriction de $\Pi = (\alpha,\beta)$ à G_2 au-dessus de la diagonale de G_o. Ceci prouve que

$$(X,Y) = (T_{u_o}s_\alpha(X_o),T_{u_o}s_\beta(X_o)) + (X_1,Y_1)$$

et par linéarité de $T\mu$;

$$X \oplus Y = (T_{u_o}s_\alpha(X_o) \oplus T_{u_o}s_\beta(Y_o)) + (X_1 \oplus Y_1).$$

soit S l'application $u \to s_\alpha(u).s_\beta(u) = S(u)$.

$$T_{u_o}s_\alpha(X_o) \oplus T_{u_o}s_\beta(Y_o) = T_{u_o}S(X_o).$$

D'autre part $X_1 \in \operatorname{Ker} T\alpha$ et $Y_1 \in \operatorname{Ker} T\beta$,

$$X_1 \oplus Y_1 = T_{x_o}R_{y_o}X_1 + T_{y_o}L_{x_o}Y_1 \qquad .$$

La condition (*) équivaut alors aux 3 conditions suivantes :

$(\zeta,\xi,\eta) \in \gamma_m$ si et seulement si :

$$(**)\quad \begin{cases} \text{(i)} \quad S^*\zeta = s_\alpha^*\xi + s_\beta^*\eta \\ \text{(ii)} \quad R^*_{y_o}(\zeta|_{\mathrm{Ker}T_{z_o}\alpha}) = \xi|_{\mathrm{Ker}T_{x_o}\alpha}. \\ \text{(iii)} \quad L^*_{x_o}(\zeta|_{\mathrm{Ker}T_{z_o}\beta}) = \eta|_{\mathrm{Ker}T_{y_o}\beta}. \end{cases}$$

Soit Γ_2 la projection de γ_m par l'application $(\zeta,\xi,\eta) \to (\xi,\eta)$. Comme $\mathrm{Ker}T_{z_o}\alpha \oplus \mathrm{Im}T_{u_o}S = T_{z_o}G$, (i) et (ii) définissent un unique ζ si $(\xi,\eta) \in \Gamma_2$ Il en résulte que γ_m est le graphe d'une application de Γ_2 dans Γ que l'on note $(\xi,\eta) \to \xi \oplus \eta$ par abus de notation.

De même si (ζ,η) appartient à la projection de γ_m sur $G \times G$, il existe un unique ξ tel que $\zeta = \xi \oplus \eta$ puisque $\mathrm{Im}T_{u_o}s_\alpha \oplus \mathrm{Ker}T_{x_o}\alpha = T_{x_o}G$. On peut donc "simplifier à droite" et de même à gauche. En particulier il existe un unique élément noté $\alpha_\Gamma(\xi)$ (resp. $\beta_\Gamma(\xi)$) tel que $\xi \oplus \alpha_\Gamma(\xi) = \xi$ (resp. $\beta_\Gamma(\xi) \oplus \xi = \xi$). Compte tenu des formules (**) en prenant $(s_\alpha, s_\beta = j)$ (resp. $s_\alpha = j$, s_β) où j est l'inclusion de G_o dans G, on montre que $\alpha_\Gamma(\xi)$ (resp. $\beta_\Gamma(\xi)$) est définie par

$$\begin{cases} \alpha_\Gamma(\xi)|_{\mathrm{Ker}T_{u_o}\beta} = L^*_{x_o}(\xi|_{\mathrm{Ker}T_{x_o}\beta}) \\ \alpha_\Gamma(\xi) \in \nu^*_{u_o}G_o \quad \text{où} \quad u_o = \alpha(x_o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_\Gamma(\xi)|_{\mathrm{Ker}T_{v_o}\alpha} = R^*_{x_o}\xi|_{\mathrm{Ker}T_{x_o}\alpha} \\ \beta_\Gamma(\xi) \in \nu^*_{v_o}G_o \quad \text{où } \beta(x_o) = v_o \end{cases}$$

pour tout $\xi \in T^*_{x_o}G$.

Par construction même de la loi $\oplus$ sur $\Gamma = T^*G$ $\xi \oplus \eta$ est définie si et seulement si l'application $(X,Y) \to \langle\xi,X\rangle + \langle\eta,Y\rangle$ se factorie à travers $T\mu$. $\xi \oplus \eta$ sera donc défini si et seulement si $T\mu(X,Y) = X \oplus Y = 0$ implique $\langle\xi,X\rangle + \langle\eta,Y\rangle = 0$. D'une part $(X,Y) \in T_{(x_o,y_o)}G_2$, $T\alpha(X) = X_o = T\beta(Y)$. D'autre part $\alpha(xy) = \alpha(y)$ et $\beta(xy) = \beta(x)$ impliquent que si $X \oplus Y = 0$ $T\alpha(Y)=0=T\beta(X)$. Il existe donc $X_1 \in \mathrm{Ker}T_{u_o}\beta$ et $Y_1 \in \mathrm{Ker}\, T_{u_o}\alpha$ tels que $X = R_{x_o}X_1$ $Y = L_{y_o}Y_1$. Mais $T\alpha(X_1) = X_o = T\beta(Y_1)$ ce qui entraîne que $X_o = X_1 + Y_1$.

Ainsi
$$\begin{cases} \alpha_\Gamma(\xi) - \beta_\Gamma(\eta) \in \nu^*_{u_o}G \\ \langle\alpha_\Gamma(\xi) - \beta_\Gamma(\eta),X_1\rangle = \langle\xi,X\rangle + \langle\eta,Y\rangle. \\ \text{si } X \oplus Y = 0. \end{cases}$$

Il résulte de ce calcul que $\Gamma_2 = \{(\xi,\eta)|\alpha_\Gamma(\xi) = \beta_\Gamma(\eta)\}$. Comme $\alpha_\Gamma(\xi \oplus \eta) = \alpha_\Gamma(\eta)$ $\beta_\Gamma(\xi \oplus \eta) = \beta_\Gamma(\xi)$, l'associativité de la loi $\oplus$ sur TG entraîne l'associativité de la loi $\oplus$ de $\Gamma = T^*G$.

$\Gamma \underset{\beta_\Gamma}{\overset{\alpha_\Gamma}{\rightrightarrows}} \nu^*G_o$ sera un groupoïde si l'on sait construire l'inversion $i_\Gamma : \Gamma \to \Gamma$

L'application des formules (**) à $\xi \oplus \eta = \beta_\Gamma(\xi)$ fournit la solution $i_\Gamma(\xi) = -{}^tTi(\xi)$ si i est l'inversion dans G.

Le reste de la vérification que Γ est un groupoïde de Lie est trivial.

On peut donc énoncer

<u>THEOREME 4.1</u> : *Si G $\rightrightarrows$ G_o est un groupoïde, T^*G est muni canoniquement d'une structure de groupoïde symplectique de 2-forme la différentielle de la forme de Liouville λ et d'unités ν^*G_o fibré conormal de G_o dans G.*

Par ailleurs $p : T^*G \to G$ est comme cotangent un groupoïde symplectique de 2-forme $d\lambda$ pour l'addition dans les fibres. Afin de préciser les relations qui existent entre les deux structures de groupoïdes $(T^*G,\oplus)$ et $(T^*G,+)$ on introduit la notion suivante dûe à C. Ehresmann [E].

DEFINITION 4.1 : *Un groupoïde double est une variété Γ munie de deux structures de groupoïdes de Lie, de loi $\oplus_i$, d'applications source et but α_i et β_i, d'unité Γ_i^o $(i = 1,2)$ telles que*

(i) α_1 et β_1 (resp. α_2 et β_2) sont des morphismes (i.e. foncteurs) de $(\Gamma,\oplus_2)$ vers $(\Gamma,\oplus_2)$ (resp. de $(\Gamma,\oplus_1)$ vers $(\Gamma,\oplus_1)$)

(ii) Axiome de permutabilité : si les composés $(x \oplus_1 y) \oplus_2 (z \oplus_1 t)$ et $(x \oplus_2 z) \oplus_1 (y \oplus_2 t)$ sont définis, ils sont égaux.

Par construction même $p : T^*G \to G$ est un foncteur de $(T^*G,\oplus)$ dans $(G,.)$. D'autre part sur la définition de α_Γ et β_Γ , il est clair que α_Γ et β_Γ sont des applications linéaires de T^*G dans ν^*G_o.

La seule chose à vérifier est donc la permutabilité. Soit donc $\xi_i \in T^*_{x_o}G$ $\eta_i \in T^*_{y_o}G$ $(i = 1,2)$ tels que $(\xi_1 \oplus \eta_1) + (\xi_2 \oplus \eta_2)$ et $(\xi_1 + \xi_2) \oplus (\eta_1 + \eta_2)$ soient définis. Alors $x_o y_o = z_o$ est défini et en posant $\zeta_i = \xi_i \oplus \eta_i$, on a par linéarité

$S^*(\zeta_1 + \zeta_2) = s^*_\alpha(\xi_1 + \xi_2) + s^*_\beta(\eta_1 + \eta_2)$ on vérifie, de même, les autres conditions (**) ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE : $(\Gamma = T^*G, d\lambda)$ *muni d'une part de l'addition dans les fibres et d'autre part de la loi $\oplus$ est un groupoïde double.*

REMARQUE : Si l'on applique la construction du cotangent d'un groupoïde au groupoïde TX, on passe par l'intermédiaire de $(TTX,\oplus)$ et TTX muni de l'addition dans les fibres de $TTX \to TX$ et de la loi $\oplus$, qui est la deuxième structure de fibré vectoriel de TTX, est un groupoïde double. La notion de groupoïde double est à la base d'un travail de Mikami et Weinstein [M. - W.].

Si $\Gamma = T^*G$, l'espace de ses unités ν^*G_o est munie d'une structure de Poisson. $C^\infty(\nu^*G_o,\mathbb{R})$ est donc une algèbre de Lie donc $\mathrm{Sect}(G_o, \nu G_o)$ est un sous-espace vectoriel. D'autre part $\nu G_\partial \to G_o$ porte la structure d'algébroïde de Lie de G; En particulier $\mathrm{Sect}(G_o,\nu G_o)$ est une algèbre de Lie.

PROPOSITION 4.1 : $\mathrm{Sect}(G_o,\nu G_o)$ *est une sous-algèbre de Lie de* $C^\infty(\nu^*G_o,\mathbb{R})$.

DEMONSTRATION : Pour tout $X \in \mathrm{Sect}(G_o,\nu G_o)$ soit X^ℓ le champ invariant à gauche sur G canoniquement associé (cf. I.4). La structure d'algèbre de Lie de $\mathrm{Sect}(G_o,\nu G_o)$ est définie par $[X,Y]^\ell = [X^\ell,Y^\ell]$. Soit $\tilde{X} : \xi \to \langle X(p(\xi)),\xi\rangle$ l'image de X dans $C^\infty(\nu G_o,\mathbb{R})$. Si pour tout $\xi \in T^*G$ on note $p(\xi) = x$, de l'invariance à gauche de X^ℓ il résulte que

$$\begin{aligned}\langle X^\ell(x),\xi\rangle &= \langle X^\ell(\alpha(x)),\ TL_x^*(\xi|_{\mathrm{Ker}T_\beta})\rangle \\ &= \langle X^\ell(\alpha(x)),\alpha_\Gamma(\xi)\rangle \\ &= \alpha_\Gamma^*X(\xi).\end{aligned}$$

Soit X_Γ le relèvement naturel sur T^*G du champ X^ℓ (cf. 3.3). X_Γ a pour hamiltonien $\alpha_\Gamma^*\tilde{X}(\xi)$ compte tenu du calcul précédent.

Par définition de la structure de Poisson de νG_o,

$$\{\tilde{X},\tilde{Y}\}(\alpha_\Gamma(\xi)) = \{\alpha_\Gamma^*\tilde{X},\ \alpha_\Gamma^*\tilde{Y}\}(\xi)$$

soit $\{\tilde{X},\tilde{Y}\}(\alpha_\Gamma(\xi)) = d\lambda(X_\Gamma,Y_\Gamma)(\xi)$.

Comme $\mathscr{L}_{X_\Gamma}\lambda = 0 = \mathscr{L}_{Y_\Gamma}\lambda$

$$\{\tilde{X},\tilde{Y}\}(\alpha_\gamma(\xi)) = \langle\lambda,[X_\Gamma,Y_\Gamma]\rangle(\xi) .$$

Les champs X_Γ et Y_Γ étant projetables par p

$$\{\tilde{X},\tilde{Y}\}(\alpha_\Gamma(\xi)) = \langle[X^\ell,Y^\ell],\xi\rangle .$$

Mais par définition du crochet dans $\mathrm{Sect}(G_o,\nu G_o)$

$$\langle[X^\ell,Y^\ell],\xi\rangle = \langle[X,Y]^\ell,\xi\rangle = \langle[X,Y],\alpha_\Gamma(\xi)\rangle .$$

Il en résulte que $\{\tilde{X},\tilde{Y}\} = [\tilde{X},\tilde{Y}]$ ce qu'il fallait prouver.

DEFINITION 4.2 . Structure de Lie-Poisson

Si $E^* \to M$ *est un fibré vectoriel sur* M, *dual de* $E \to M$, *une structure de Lie-Poisson sur* E^* *est une structure de Poisson pour laquelle* Sect(M,E) *est une sous-algèbre de Lie de* $C^\infty(E^*,\mathbb{R})$.

Sect(M,E) est alors une algèbre de Lie locale au sens de Kirillov.

La proposition 4.1 peut se reformuler ainsi

PROPOSITION 4.2 : *si* $G \rightrightarrows G_o$ *est un groupoïde de Lie,* $\nu^* G_o \to G_o$ *est canoniquement muni d'une structure de Lie-Poisson induisant sur* $\mathrm{Sect}(G_o,\nu G_o)$ *la structure d'algèbre de Lie associée à l'algébroïde de Lie de G.*

CAS PARTICULIER : Si G est un groupe de Lie G_o est réduit à l'identité et $\Gamma_o = \underline{G}^*$ dual de l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G. On vérifie que si $\xi \in T^*_g G$,

$$\alpha_\Gamma(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi} \circ L_g = L^*_g(\tilde{\xi})$$

$$\beta_\Gamma(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi} \circ R_g = R^*_g(\tilde{\xi})$$

$\Gamma = T^*G$ est un groupoïde α-connexe si G est connexe et dans ce cas les orbites de Γ dans $\Gamma_o = \underline{G}^*$ sont les orbites de la représentation coadjointe. La structure induite sur $\underline{G}^*$ est sa structure canonique de variété de Poisson pour laquelle $\underline{G}$ s'identifie à une sous-algèbre de Lie de $C^\circ(\underline{G}^*,\mathbb{R})$. Ceci justifie la définition suivante :

DEFINITION 4.3 : *Si* $G \rightrightarrows G_o$ *est un groupoïde* α*-connexe, on appelle orbites de la représentation co-adjointe de G les orbites dans* $\nu^* G_o$ *du groupoïde* $(T^*G,\oplus)$

§ 5 - AUTRES EXEMPLES.

1 - $G \to G_o$ est un fibré en groupes au-dessus de G_o c'est un groupoïde. T^*G a pour unités $\nu^* G_o$ fibré (en duaux d'algèbres de Lie) dual du fibré vertical

$$T^*G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \nu^* G_o$$

$\alpha = \beta$ et l'isotropie en un point x_o est isomorphe au groupe $G_{x_o} \times T_{x_o} G_o$ où G_{x_o} est le groupe d'isotropie de G en x_o.

2 - Groupoïde de jauge. Soit $E \to M$ un G-fibré principal, $\mathscr{H}$ son groupoïde de jauge, (I.5 c) et $\varepsilon \to M$ sur algébroïde de Lie transitif (I.4). Le groupoïde cotangent $T^*\mathscr{H}$ a pour unités $\nu^* \mathscr{H}_o$ qui est le dual de ε. Se donner une G-connexion sur $E \to M$, c'est se donner une scission γ de la suite exacte de fibrés sur M :

$$0 \to E(\underline{G}) \to \varepsilon \underset{\gamma}{\rightleftarrows} TM \to 0$$

où $E(\underline{G})$ est le fibré en algèbres de Lie canoniquement associé. $E(\underline{G})$ est encore le fibré associé à E(G) de fibre type $\underline{G}$ pour la représentation coadjointe.

${}^t\gamma$ fournit un isomorphisme de ε^* avec le produit fibré $T^*M \times_M E(\underline{G}^*)$ qui se trouve ainsi muni d'une structure de Poisson dont $T^*\mathscr{H}$ est une réalisation stricte. A chaque orbite de la coadjointe de G est associée une feuille symplectique de ε^* qui est l'espace des phases d'une particule dans le champ de Yang et Mills défini par la connexion de $E \to M$ donnée. [cf. W. 1978].

3 - Si G est un groupe opérant sur M et Γ le groupoïde $G \times M$ (cf. I.5-b), $T^*\Gamma$ groupoïde cotangent de Γ a pour ensemble d'unités $\underline{G}^* \times M$ muni de la structure de Poisson produit semi-direct de la structure de Poisson de $\underline{G}^*$ par la structure triviale de M; [W. 1987 b].

4 - Si $\mathscr{F}$ est un feuilletage régulier sur une variété M, $\mathscr{H}ol(\mathscr{F})$ le groupoïde d'holonomie de $\mathscr{F}$. Le groupoïde cotangent $\Gamma = T^*\mathscr{H}ol(\mathscr{F})$ a pour unités $\mathscr{F}^*$ espace cotangent au feuilletage qui se trouve ainsi muni d'une structure de variété de Poisson dont on vérifie aisément que c'est la structure de Poisson considérée dans [Lic. 1982] obtenu en considérant la réduction symplectique $T^*M \to \mathscr{F}^*$ qui est une fibration isotrope symplectiquement complète à fibre un espace numérique.

5 - $\mathscr{F}$ étant toujours un feuilletage régulier sur M, $\mathscr{H}ol(\mathscr{F})$ son groupoïde d'holonomie, $\nu\mathscr{F}$ le fibré normal de $\mathscr{F}$, on peut définir le produit semi-direct G du groupoïde $ol(\mathscr{F})$ par le groupoïde vectoriel Π : $\nu\mathscr{F} \to M$

$$\nu\mathscr{F} \to G \to \mathscr{H}ol(\mathscr{F}).$$

G est le produit fibré sur M de $\alpha : \mathcal{H}ol(\mathcal{F}) \to M$ par $\pi : \nu\mathcal{F} \to M$ et si $(g_i, X_i) \in G$ $(i = 1,2)$ le produit $(g_1,X_1)(g_2,X_2)$ n'est défini que si g_1g_2 l'est et alors $(g_1,X_1)(g_2,X_2) = (g_1g_2, g_2^{-1}X_1 + X_2)$ où l'on note gX l'action naturelle de $\mathcal{H}ol(\mathcal{F})$ sur $\nu\mathcal{F}$ $(\alpha(g) = \Pi(X))$.

G a pour espace d'unités $G_o = M$ et $\Gamma = T^*G$ a pour espace d'unités $\nu^*G_o = \mathcal{F}^* \times_M \nu^*\mathcal{F}$ produit fibré sur M de $\mathcal{F}^*$ par $\nu^*\mathcal{F}$. ν^*G_o est ainsi muni d'une structure de Poisson qui se projette sur la structure de Poisson de $\mathcal{F}^*$ construite dans l'exemple 4 dont les feuilles sont les cotangents des feuilles de $\mathcal{F}$. Si S est la feuille de $(\xi_o,\eta_o) \in \mathcal{F}^*_{x_o} \times \nu^*_{x_o}\mathcal{F}$, $\psi^\infty_{x_o}$ le groupe d'holonomie infinitésimale de la feuille F_{x_o} de $\mathcal{F}$ passant par x_o, S est un revêtement de $T^*F_{x_o}$ de fibre $\psi^\infty_{x_o}.\eta_o$ ensemble des images de η_o par le groupe d'holonomie infinitésimale de x_o.

CHAPITRE III

Troisième théorème de Lie local pour les variétés de Poisson

§ 1. REALISATIONS SYMPLECTIQUES

DEFINITION 1.1 : *Une réalisation symplectique d'une variété de Poisson* (P,Λ) *est la donnée d'une variété symplectique* (M,σ) *et d'un morphisme de Poisson* $f : (M,\sigma) \to (P,\Lambda)$. *La réalisation est pleine si* f *est une submersion surjective ;*

Une réalisation stricte est un couple formé d'une réalisation pleine $f : M \to P$ *et d'une section lagrangienne globale* s *de* f.

Si (f,s) est une réalisation stricte, on identifie par s, P à une sous-variété lagrangienne de M.

On sait [W. 1983] que si (P,Λ) est une variété de Poisson, tout point $x_o \in P$ possède un voisinage qui admet une réalisation stricte. L'objectif de ce paragraphe est de prouver que toute variété de Poisson séparée possède une réalisation séparée stricte qui est un groupoïde local (symplectique) au sens de Van Est.

Dans ce qui suit $\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma_o$ désigne systématiquement une réalisation stricte de la variété de Poisson (Γ_o,Λ_o), Γ_o étant une sous variété lagrangienne de Γ . Γ_o sera toujours supposée séparée et paracompacte.

LEMME 1 : *si* $\alpha : \Gamma \to \Gamma_o$ *est une réalisation symplectique stricte, il existe un voisinage ouvert* U *de* Γ_o *et une submersion surjective* β *de* U *sur* Γ_o *tels que*

(i) $\forall x \in \Gamma_o$, $\alpha^{-1}(x)$ *et* $\beta^{-1}(x)$ *sont connexes.*

(ii) Les α*-fibres et les* β*-fibres sont symplectiquement orthogonales.*

En particulier $\beta : U \to -\Gamma_o$ (où $-\Gamma_o$ désigne Γ_o muni de la structure de Poisson opposée) est une réalisation symplectique stricte. α et β forment une paire duale au sens de [W. 1983] .

DEMONSTRATION : α étant une submersion de Poisson, l'orthogonal symplectique α^{σ} du feuilletage défini par α est un feuilletage régulier qui Γ_o étant lagrangienne, est transverse à Γ_o.

L'étape principale de la démonstration est le lemme suivant dont la preuve repose sur une idée de Godement [G] chapitre II.3.

LEMME 2 : *Soit* M *une variété (pas forcément séparée)* N *une sous-variété séparée paracompacte de* M *et* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de* M *tel que pour tout* $x \in N$ $T_xN \oplus \mathcal{F}_x = T_xM$. *Il existe alors un voisinage ouvert* U_o *de* N *et une submersion* $\beta : U_o \to N$ *telle que pour tout* $x \in N$ *le feuilletage induit sur* U_o *ait pour feuille* $\beta^{-1}(x)$.

DEMONSTRATION : N étant une sous-variété de M transverse à $\mathcal{F}$, on peut pour tout $x \in N$ trouver un voisinage ouvert V_x de x dans N et un ouvert distingué U_x de x dans M tels que

(I) $U_x \cap N = V_x$

(II) $\mathcal{F}_{U_x}$ a pour feuilles les contre images d'une submersion β_x de U_x sur V_x.

N étant paracompacte puisque séparée, il existe un recouvrement ouvert localement fini plus fin $(V_i)_{i \in I}$ de N et une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts distingués tels que l'on ait (I) et (II). Soit $\beta_i : U_i \to V_i$ la submersion associée et

$$U_o = \{x \in \bigcup_{i \in I} U_i \mid \text{ si } x \in U_i \cap U_j \ \ \beta_i(x) = \beta_j(x)\} .$$

U_o contenant N, tout revient à prouver que U_o est un voisinage de N. Si $x_o \in N$, x_o n'appartient qu'à un nombre fini $(V_j)_{1 \leq j \leq k}$ d'ouverts du recouvrement $(V_i)_{i \in I}$.

$\bigcap_j V_j$ étant un voisinage ouvert de x_o, on peut trouver un voisinage ouvert $W_{x_o} \subset \bigcap_j V_j$ et un ouvert distingué $\mathcal{U}_{x_o}$ tels que $\mathcal{U}_{x_o}$ et W_{x_o} vérifiant (I) et (II), $\mathcal{U}_{x_o}$ étant contenu dans $\bigcap_j U_j$ qui est un voisinage de x_o dans M. Si pour tout

$x \in \mathcal{U}_{x_o}$ on note ϕ_x la plaque de $\mathcal{F}|\mathcal{U}_{x_o}$ contenant x et $\mathcal{F}^j_x$ la plaque de $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_\gamma}$ contenant x, $\phi_x \subset \mathcal{F}^j_x$. Il en résulte que les β_j coïncident sur $\mathcal{U}_{x_o}$ et donc $\mathcal{U}_{x_o} \subset U_o$ C.Q.F.D.

<u>FIN DE LA DEMONSTRATION DU LEMME 1</u> : Soit U_o le voisinage fourni par le lemme 2 pour le feuilletage α^σ et $\beta : U_o \to \Gamma_o$. Soit U le sous-ensemble des x qui appartiennent à la fois aux feuilles de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ pour, respectivement, les feuilletages induits par α et β ; il est clair que U est un voisinage ouvert de Γ_o ce qui achève la démonstration.

<u>THEOREME 1.1</u> : <u>Action symplectique naturelle d'une réalisation stricte sur une réalisation</u> : *Soit* $\alpha : \Gamma \to \Gamma_o$ *une réalisation stricte et* $J : M \to \Gamma_o$ *une réalisation (quelconque de* Γ_o*. Il existe une immersion lagrangienne unique* $\gamma : -M \times M \times \Gamma$ *, maximale parmi les immersions lagrangiennes contenues dans* $K = \{(q,p,x) | J(q) = \alpha(x)\}$ *et contenant comme sous-variété (fermée si* Γ_o *est fermée dans* Γ*)* $I = \{(p,p,u) | J(p) = u \in \Gamma_o\}$.

De plus si on restreint α *à l'ouvert* U *fourni par le lemme 1,* $\beta(x) = J(p)$ *si* $(q,p,x) \in \gamma \cap (-M \times M \times U)$.

<u>DEMONSTRATION</u> : Soit $\mathcal{J} : -M \times M \times \Gamma \to -\Gamma_o \times \Gamma_o$ le morphisme de Poisson $(q,p,x) \to (J(q),\alpha(x))$. K étant l'image réciproque de la diagonale de $-\Gamma_o \times \Gamma_o$ par $\mathcal{J}$ qui lui est transverse (puisque α est pleine) est une sous-variété fermée de $-M \times M \times \Gamma$. Par construction, pour tout $z \in K$, l'espace conormal à K en z $\nu^*_z K$ est l'ensemble des $-J^*\omega + \alpha^*\omega$ pour $\omega \in T^*_{\alpha(x)}\Gamma_o$. Il en résulte que l'orthogonal symplectique de T_zK est contenu dans T_zK. K est donc une sous-variété coïsotrope fermée de $-M \times M \times \Gamma$ dont le feuilletage caractéristique $\mathcal{F}$ est engendré par les flots des hamiltonient $(\alpha^*h - J^*h \mid h \in C^\infty(\Gamma_o,\mathbb{R})$. Ces flots sont de la forme $(q,p,x) \to (\varphi^J_t(q),p,\varphi^\alpha_t(x))$ où φ^J_t (resp. φ^α_t) est le flot de J^*h sur (M,σ) (resp. α^*h sur Γ). De plus si φ_t est le flot sur (Γ_o,Λ_o) du hamiltonien h

$$\alpha_o \varphi_t^\alpha = \varphi_t \circ \alpha$$

$$J_o \varphi_t^J = \varphi_t \circ J .$$

Soit L la sous variété lagrangienne $\Delta \times \Gamma_o$ de $-M \times M \times \Gamma$ constituée des points (p,p,u) où $u \in \Gamma_o$. $I = L \cap K$ est donc une sous-variété isotrope (fermée si Γ_o est fermée dans Γ) de K. Il est immédiat que pour tout $z_o \in I$ $T_{z_o} I \cap \mathscr{F}_{z_o} = \{o\}$ et que $T_{z_o} I + \mathscr{F}_{z_o} = T_{z_o} K$. On peut donc appliquer la méthode des caractéristiques (cf. Appendice 3) : pour tout $z_o \in I$ soit F_{z_o} la feuille de $\mathscr{F}$ passans par z_o et γ la somme disjointe $\coprod_{z_o \in I} F_{z_o}$; il existe sur γ une structure de variété telle que

(I) I est une sous-variété de γ

(II) l'application canonique $\coprod_{z_o \in I} F_{z_o} = \gamma \to -M \times M \times \Gamma$ (qui envoie γ dans K) est une immersion lagrangienne connexe, maximale parmi les immersions lagrangiennes connexes contenues dans K et contenant I.

Si $(q,p,x) \in \gamma$ il existe par construction $u \in \Gamma_o$ et k fonctions $h_i \in C^\infty(\Gamma_o, \mathbb{R})$ tels que si $(\varphi^\alpha; \varphi^J)$ désignent par abus de notation les produits des flots $\alpha^* h_i$ et $J^* h_i$ respectivement, pris dans le même ordre,

$$\lambda = \varphi^\alpha(u) \qquad q = \varphi^J(p)$$

Par construction même $J(q) = \alpha(x)$ $J(p) = u$. Si, de plus, on se restreint au voisinage U de Γ_o fourni par le lemme 1, $\beta(x) = u = J(p)$. La démonstration du théorème 11 est achevée.

Si $\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma_o$ est stricte on peut appliquer la construction précédente au cas $J = \alpha$: ceci va fournir la structure de groupoïde local sur un voisinage de Γ_o.

La définition suivante est due à Van Est :

<u>DEFINITION 1.2</u> : [V.E. 1984] : *Un <u>groupoïde</u> (différentiel) <u>local</u> est une variété G munie de deux submersions α et β sur une sous-variété <u>séparée</u> G_o, d'un*

difféomorphisme de G *dans* G $x \to x^{-1}$ *appelé inversion, d'une multiplication notée* $(x,y) \to x.y$ *qui est une application différentiable d'un voisinage ouvert* G_m *de* G_o *dans* $G_2 = \{(x,y)|\alpha(x) = \beta(y)\}$ *vérifiant les axiomes* (Id) *et* (Inv)*des groupoïdes et telles que*

(I) si $x.y$ *est défini,* $y^{-1}.x^{-1}$ *est défini et est l'inverse de* $x.y$

(II) <u>*Associativité locale*</u> *si* $x.y, y.z$ *et* $x.(y.z)$ *sont définis,* $(x.y).z$ *est défini et égal à* $x.(y.z)$.

Un groupoïde local est symplectique si G est une variété symplectique et si le graphe de la multiplication est une sous-variété lagrangienne de $-G \times G \times G$.

On notera que si $G_m = G_2$ G est un groupoïde.

Si l'on applique le théorème 1.1 au couple (α,α) on obtient une immersion lagrangienne γ_α dans $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$, dont l'image est contenue dans la variété coïsotrope : $K_\alpha = \{(z,y,x)|\alpha(z) = \alpha(x)\}$ et s'appuyant sur la sous-variété

$$I_\alpha = \{(y,y,u)|\alpha(y) = u\} .$$

Dorénavant on se restreint au voisinage de Γ_o fourni par le lemme 1, que par abus de notation l'on note Γ. γ_α est contenu dans $K_\alpha \cap K_\beta$ où $K_\beta = \{(z,y,x)|\beta(z) = \beta(y)\}$.

Un raisonnement analogue à celui conduisant au théorème 1.1 permet de montrer que $K_\alpha \cap K_\beta$ est une sous-variété soïsotrope de $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ dont le feuilletage caractéristique est $\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta$ où $\mathcal{F}_\alpha$ est engendré par les flots des hamiltoniens $(z,y,x) \to -h(\alpha(z)) + h(\alpha(x))$ et $_\beta$ par ceux de $h(\beta(z)) - h(\beta(x))$. (On note ϕ_α le flot de α^*h sur (Γ,σ) et ϕ_β celui de $-\beta^*h$ sur (Γ,σ)). Enfin $I_o = \{(u,u,u)|u \in \Gamma_o\}$ est une sous-variété isotrope de $K_\alpha \cap K_\beta$ transverse au feuilletage $\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta$. La méthode des caractéristiques fournit alors une unique immersion lagrangienne maximale $\gamma_{\alpha\beta}$ contenant I_o et contenue dans $K_\alpha \cap K_\beta$.

On note $\Gamma_2 = \{(y,x)|\alpha(y) = \beta(x)\}$.

<u>LEMME 3</u> : $\gamma_{\alpha\beta}$ *est un graphe de* Γ_2 *dans* Γ .

<u>DEMONSTRATION</u> : Soit $\rho : -\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \to \Gamma \times \Gamma \quad (z,y,x) \to (y,x)$. ρ envoie $\gamma_{\alpha\beta}$ sur une partie $U_{\alpha\beta}$ de Γ_2 . Tout revient à prouver que $\rho(z,y,x) = \rho(z_1,y,x)$ entraîne que $z = z_1$.

Cette propriété (qui distingue $\gamma_{\alpha\beta}$ de γ_α) va résulter de la commutation des flots des hamiltoniens définissant $\mathscr{F}_\alpha$ et $\mathscr{F}_\beta$ et de la définition de $\gamma_{\alpha\beta}$:

si $(z,y,x) \in \gamma_{\alpha\beta}$ il existe un produit de flots hamiltoniens ϕ^α (resp. de flots ϕ^β) tels que

$$y = \phi^\beta(u) \qquad x = \phi^\alpha(u) \qquad z = \phi^\beta\phi^\alpha(u) = \phi^\alpha\phi^\beta(u)$$

ce qui implique que $z = \phi^\alpha(y) = \phi^\beta(x)$.

De même, avec des notations évidentes, si $(z,y,x) \in \gamma_{\alpha\beta}$

$$\begin{cases} y = \phi_1^\beta(u_1) & x = \phi_1^\alpha(u_1) \\ z_1 = \phi_1^\beta(x) & = \phi_1^\alpha(y) \end{cases}$$

comme $\alpha(y) = u = u_1$, $z_1 = \phi_1^\beta(x) = \phi_1^\beta(\phi^\alpha(u)) = \phi^\alpha(y)$ et donc $z = z_1$.

C.Q.F.D.

Il est immédiat que $\rho : \gamma_{\alpha\beta} \to \Gamma_2$ est une submersion, ce qui implique que $U_{\alpha\beta}$ est ouvert dans Γ_2, et donc que $\gamma_{\alpha\beta}$ est une sous-variété (lagrangienne) de $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$.

Or $I_\alpha = \{(x,u,x) | \alpha(x) = u\}$. Comme Γ est α-connexe, il existe un produit de flots ϕ_α tels que $x = \phi_\alpha(u)$ ce qui implique que $I_\alpha \subset \gamma_{\alpha\beta}$ et par maximalité de γ_α que $\gamma_{\alpha\beta} \subset \gamma_\alpha$.

<u>NOTATION</u> : Si $(z,y,x) \in \gamma_{\alpha\beta}$ on écrira dorénavant $z = y.x$ si $y.x = y_1.x$, $y_1.x = \phi_1^\beta(x) = \phi_1^\beta(\phi^\alpha(u)) = \phi^\alpha(y_1)$ or $y.x = \phi^\alpha(y)$. ϕ^α étant un difféomorphisme $y = y_1$. On peut donc simplifier à gauche et, de même, à droite. Comme $y.\alpha(y) = y$ (resp. $\beta(y).y = y$), la relation $y.x = y$ (resp. $xy = y$) entraîne que $x = \alpha(y)$ (resp. $x = \beta(y)$) .

Pour prouver que $\Gamma \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ possède un voisinage de Γ_o qui est un groupoïde local il reste à vérifier l'associativité et à construire un voisinage ouvert de Γ_o dans Γ muni d'une inversion.

Comme $\gamma_{\alpha\beta}$ est le graphe d'une application d'un voisinage ouvert $U_{\alpha\beta}$ de Γ_o dans Γ_2 , Δ désignant la diagonale de $\Gamma \times \Gamma$, $(x_1,x_2,x_3) \to x_1.(x_2x_3)$ a pour graphe l'image dans $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ de

$$\gamma_{\alpha\beta} \times \gamma_{\alpha\beta} \cap -\Gamma \times \Gamma \times \Delta \times \Gamma \times \Gamma$$

par l'application $(z\ x_1,x,x,x_2,x_3) \to (z,x_1,x_2,x_3)$ sous-variété lagrangienne contenue dans

$$K_1 = \{(z,x_1,x_2,x_3) | \alpha(z) = \alpha(x_3), \beta(z) = \beta(x_1), \beta(x_2) = \alpha(x_1)\}$$

s'appuyant sur $\{(u,u,u,u)\{u \in \Gamma_o\}$.

tandis que $(x_1,x_2,x_3) \to (x_1.x_2).x_3$ a pour graphe une sous-variété lagrangienne de $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ contenu dans K_2 constitué des (z,x_1,x_2,x_3) tels que

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha(z) = \alpha(x_3) & \beta(z) = \beta(x_1) \\ \alpha(x_1x_2) = \alpha(x_2) & \beta(x_1x_2) = \beta(x_1) \end{cases}$$

et s'appuyant sur $\{(u,u,u) | u \in \Gamma_o\}$.

Des relations (*) on déduit que $K_1 \subset K_1$ et donc que $K_1 \equiv K_2$. Les deux sous-variétés lagrangiennes coïncident ce qui assure que si $x_1.(x_2.x_3)$ est défini, ainsi que $(x_1.x_2)$, $((x_1.x_2),x_3)$ projection de $x_1.(x_2.x_3)$ sur $\Gamma_2 \times \Gamma$ a pour image $x_1.(x_2.x_3) = (x_1.x_2).x_3$ ce qui prouve l'associativité locale.

Enfin de ce que l'on peut simplifier à gauche il résulte que $-\Gamma_o \times \Gamma \times \Gamma$

$-\Gamma_o \times \Gamma \times \Gamma \cap \gamma_{\alpha\beta}$ se projette par $(z,y,x) \to (y,x)$ en le graphe d'une application d'un voisinage de Γ_o dans Γ à valeurs dans Γ, $x \to y_1(x)$ telle que $y_1(x).x = \alpha(x)$. Il existe de même un voisinage de Γ_o sur lequel est défini $x \to y_2(x)$ tel que $x.y_2(x) = \alpha(x)$. Sur l'intersection y_1 et y_2 sont définis et l'associativité locale entraîne que $y_1 \equiv y_2$. On a donc exhibé un voisinage U_o de Γ_o dans Γ sur lequel

est défini : $x \to x^{-1}$. Comme $f^2(x) = x$ dès que $f^2(x)$ est défini, il existe un voisinage U de Γ_o dans Γ tel que $x \to x^{-1}$ soit un difféomorphisme de U. Si $U_2 = \{(y,x) | \alpha(y) = \beta(x)\}$, U_2 est un voisinage ouvert de Γ_o dans Γ. si $(y,x) \in U_2 \cap U_{\alpha\beta}$ il résulte de l'associativité locale que $y^{-1}.(y.x)$ est défini et vaut x ce qui à son tour entraîne que $(x^{-1}.y^{-1}).(y.x) = \alpha(x)$.

Le couple $(U, U_m = U_2 \cap U_{\alpha\beta})$ est donc un groupoïde local symplectique. Nous avons démontré :

<u>THEOREME 1.2</u> : *Si* $\alpha : \Gamma \to \Gamma_o$ *est une réalisation symplectique stricte, il existe un voisinage de* Γ_o *dans* Γ, U *muni canoniquement d'une structure de groupoïde symplectique local pour laquelle* $U \xrightarrow{\alpha} \Gamma_o$ *est l'application source.*

Cette structure est canonique au sens suivant : si V est un autre voisinage ouvert de Γ_o muni d'une structure de groupoïde local pour laquelle $V \xrightarrow{\alpha} \Gamma_o$ est l'application source, il existe un voisinage ouvert de Γ_o, $W \subset U \cap V$ sur lequel U et V induisant la même structure de groupoïde local.

Ceci va résulter de la proposition suivante appliquée à l'application identique de $V \cap U$ muni de la structure induite par U, dans V :

<u>PROPOSITION 1.1</u> : *Si* $\Gamma^i \underset{\alpha_i}{\overset{\beta_i}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ $(i = 1,2)$ *sont deux groupoïdes (locaux) symplectiques de même base* Γ_o *et si* $f : \Gamma^1 \to \Gamma^2$ *est un morphisme symplectique, laissant invariant* Γ_o *, tel que* $\alpha_2 \circ f = \alpha_1$ *, f est un morphisme de groupoïdes (locaux). De plus f est canoniquement déterminé sur la composante* α*-connexe de* Γ^1.

<u>DEMONSTRATION</u> : Il faut prouver que si y.x est défini dans Γ^1 f(y).f(x) l'est dans Γ^2 et vaut f(y.x).

<u>NOTATION</u> : Pour tout $h \in C^\infty(\Gamma_o, \mathbb{R})$ on notera $]t^-(h,u), t^+(h,u)[$ (resp. $]t^-(\alpha^* h, x), t^+(\alpha^* h, x,[$) l'intervalle de définition en u (resp. x) du flot du hamiltonien de h (resp. $\alpha^* h$).

Avec cette notation, $\alpha_2 \circ f = \alpha_1$ et le fait que f soit un morphisme symplectique entraînent que

$$t^-(\alpha_2^* h, f(x)) \leqslant t^-(\alpha_1^* h, x) < t^+(\alpha_1^* h, x) \leqslant t^+(\alpha_2^* h, f(x)).$$

Il en résulte que si $(y,x) \in \gamma_{\alpha_2\beta_1}$, $(f(y),f(x)) \in \gamma_{\alpha_2\beta_2}$ et $f(y.x) = f(y)/f(x)$. Si Γ_{12} désigne la composante α-connexe de Γ^1 , tout $x \in \Gamma_{12}$ s'écrit $x = \phi^{\alpha_1}(u)$. Comme f est un morphisme symplectique induisant l'identité sur Γ_o , $f(x) = f(\phi^{\alpha_1}(u)) = \phi^{\alpha_2}(u)$. Ce qui assure que f est canoniquement déterminée sur Γ_{12} , qui est un voisinage ouvert de Γ_o dans Γ^1.

<u>DEFINITION 1.3</u> : *Une paire duale stricte* (α,β) *connexe* $\Gamma \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$, $\Gamma_o \subset \Gamma$ *est une paire duale* (α,β) *telle que*

(I) $\alpha : \Gamma \to \Gamma_o$ $\beta : \Gamma \to -\Gamma_o$ *sont des réalisations strictes formant une paire duale.*

(II) $\forall\, x \in \Gamma_o$ $\bar{\alpha}^1(x)$ *et* $\bar{\beta}^1(x)$ *sont connexes.*

Tout groupoïde symplectique α-connexe est une paire duale stricte (α,β)-connexe. De plus si $\Gamma \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ est un groupoïde symplectique les champs de hamiltoniens $\alpha^* h$ sont des champs invariants à gauche sur Γ et en particulier si $u \in \Gamma_o$ des champs invariants à gauche sur le fibré, principal pour l'action à gauche de $\Gamma_u = \bar{\alpha}^1(u) \cap \bar{\beta}^1(u)$, $\beta : \bar{\alpha}^1(u) \to S_u$ où S_u est l'orbite de u par Γ . [II.2. Lemme] . Il est alors classique [Lic. 1955] que, avec les notations introduites plus haut,

$$(*) \quad \begin{cases} t^+(h,\alpha(x)) = t^+(\alpha^* h, x) \\ t^-(h,\alpha(x)) = t^-(\alpha^* h, x) \end{cases}$$

En fait les conditions (*) caractérisent parmi les paires duales strictes les groupoïdes :

PROPOSITION 1.2 : *Si* $\Gamma \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ *est une paire duale stricte* (α,β) *connexe,* Γ *est un groupoïde symplectique ssi* Γ *vérifie les conditions* (*) *et cette structure est canonique.*

DEMONSTRATION : Le caractère canonique de la structure résulte de la proposition 1.1. Tout revient à prouver que si Γ vérifie (*), Γ est un groupoïde symplectique ce qui à son tour revient à prouver avec les notations introduites dans la démonstration du théorème 1.2 que $U_{\alpha\beta} = \Gamma_2$; Comme Γ est (α,β) connexe, tout $(y,x) \in \Gamma_2$ s'écrit $(y = \phi^{\beta}(u)\ ,\ x = \phi^{\alpha}(u))$. Mais compte tenu de (*), $\phi^{\beta}(x)$ et $\phi^{\alpha}(y)$ sont définis et donc coïncident ce qui implique que $(\phi^{\alpha}(y),y,x) \in \gamma_{\alpha\beta}$. Ainsi $U_{\alpha\beta} = \Gamma_2$, ce qu'il fallait démontrer.

Dans les problèmes d'atteignabilité pour un feuilletage (de Stefan) on peut toujours remplacer l'algèbre de Lie complète $\mathcal{G}$ de champs de vecteurs définissant le feuilletage par la sous-algèbre de Lie $\mathcal{G}_o$ des champs à supports compacts (cf. I.4) ce qui a l'avantage de n'utiliser que des champs complets. On peut donc dans l'énoncé des conditions (*) de la proposition 1.2 se limiter aux fonctions h sur Γ_o à support compact, pour lesqueles les conditions (*) signifient simplement que pour tout h à support compact le champ de hamiltonien $\alpha^* h$ est complet. Une réalisation symplectique $\alpha : \Gamma \to \Gamma_o$ pour laquelle cette propriété est réalisé est appelée complète par Karasev (Ka. 1986). Ceci conduit à la version équivalente de 1.2 :

PROPOSITION 1.2' : *Si* $\Gamma \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \Gamma_o$ *est une paire duale stricte* (α,β) *connexe* Γ *est un groupoïde symplectique ssi* $\alpha : \Gamma \to \Gamma_o$ *est une réalisation complète au sens de Karasev. De plus cette structure est canonique.*

La proposition 1.1 s'interprète en disant que l'identité de Γ_o se relève de façon unique au voisinage de Γ_o dans Γ^1 en un morphisme de groupoïde symplectique.

Inversement si $f : \Gamma^1 \to \Gamma^2$ est un morphisme de groupoïdes symplectiques il induit un morphisme de Poisson f_o de Γ^1_o dans Γ^2_o. On peut se demander à quelle condition on peut relever un morphisme de Poisson de Γ^1_o dans Γ^2_o en un morphisme de

groupoïdes symplectiques. On va voir qu'en fait cette situation est très rigide ce qui , pour partie, traduit le fait bien connu qu'un morphisme f_o de variétés ne s'étend en un morphisme des fibrés cotangents le relevant, que si f_o est un difféomorphisme ; il suffit pour s'en convaincre de considérer les cotangents Γ^1 et Γ^2 de deux groupoïdes Γ^1_o et Γ^2_o.

<u>THEOREME 1.3</u> : *Soit* $\Gamma^i \underset{\alpha_i}{\overset{\beta_i}{\rightrightarrows}} \Gamma^i_o$ *deux groupoïdes locaux symplectiques - que l'on peut toujours supposer* α_i *et* β_i *connexes. Soit* $f_o : \Gamma^1_o \to \Gamma^2_o$ *un morphisme de Poisson et* $K_\alpha = \{(x_2,x_1) \mid (\alpha_2(x_2),\alpha_1(x_1)) \in G_o\}$ *(resp.* $K_\beta = \{(x_2,x_1) \mid (\beta_2(x_2),\beta_1(x_1)) \in G_o)$ *où* G_o *est le graphe de* f_o. *Il existe une unique immersion lagrangienne maximale* G_α *contenant* G_o *et contenue dans* K_α. G_α *est également contenue dans* K_β *et* G_α *est un groupoïde local d'espace d'unités* .

Si G_α *est un graphe d'un voisinage ouvert de* Γ^1_o *dans* Γ^1, *nécessairement* Γ^1 *et* Γ^2 *sont de même dimension et* f_o *est un difféomorphisme local de* Γ^1_o *dans* Γ^2_o.

Si f_o *est un difféomorphisme de Poisson de* Γ^1_o *sur* Γ^2_o, *il existe un morphisme unique de groupoïdes locaux symplectiques de* Γ^1 *dans* Γ^2 *relevant* f_o.

<u>COROLLAIRE</u> : *Si* $\Gamma^i \underset{\alpha_i}{\overset{\beta_i}{\rightrightarrows}} \Gamma^i_o$ *sont deux* <u>*groupoïdes*</u> *symplectiques* α_i*-connexes de même dimension, si* $f_o : \Gamma^1_o \longrightarrow \Gamma^2_o$ *est un difféomorphisme de Poisson de* Γ^1_o *sur* Γ^2_o, *et si pour tout* $x \in \Gamma^1_o$, $\bar{\alpha}_1^{-1}(x)$ *est simplement connexe, il existe un unique morphisme de groupoïdes symplectiques* f *qui relève* f_o. *De plus* $f : \Gamma^1 \to \Gamma^2$ *est un difféomorphisme local.*

En particulier si Γ^2 *est* α_2*-simplement connexe,* f *est un isomorphisme.*

Ce corollaire peut se traduire en disant que si Γ_o possède une réalisation stricte Γ qui est α-simplement connexe, Γ est unique à isomorphisme de groupoïdes symplectiques près, analogue pour les algèbres de Lie de dimension infinie du résultat bien connu reliant algèbres et groupes de Lie de dimension finie.

<u>DEMONSTRATION</u> : K_α étant coïsotrope et $G_o \subset K_\alpha$ la méthode des caractéristiques permet de construire G_α . Comme (α_i, β_i) est une paire duale les caractéristiques de K_α issues de $G_o \subset K_\alpha \cap K_\beta$ sont contenues dans K_β . Si G_β est l'unique immersion lagrangienne associée au couple (G_o, K_β) et $i_\alpha : G_\alpha \to \Gamma_2 \times -\Gamma_1$, on pose $i_\alpha^{-1} G_\beta = G_{\alpha\beta}$. $G_{\alpha\beta}$ est un voisinage ouvert de G_o. On va se contenter de prouver que l'on peut munir G_α d'une loi de produit local faisant de i_α un homomorphisme.

Comme $G_\alpha = \coprod_{z \in G_o} F_z^\alpha$ où F_z^α est la caractéristique de K_α issue de z, on définit

$\alpha : G_\alpha \to G_o$ par $\alpha(F_z^\alpha) = z$. Comme le feuilletage défini par les caractéristiques de K_β , $\mathscr{F}^\beta$, est transverse à G_o on peut (Lemme 1) réduire $G_{\alpha\beta}$ à un voisinage ouvert de G_o sur lequel $\mathscr{F}^\beta$ est défini par une submersion β et on peut imposer que $G_{\alpha\beta} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G_o$ soit α et β-connexe. Alors si (y_2, y_1) et $(x_2, x_1) \in F_z^\alpha \cap G_{\alpha\beta}$ et si existent $y_2 . x_2$ et $y_1 . x_1$ ((i.e. $(y_2, x_2) \in U^2_{\alpha_2\beta_2}$ et $(y_1, x_1) \in U^1_{\alpha_1\beta_1}$ avec

les notations du théorème 1.1)

$$y_2 . x_2 = \phi^{\alpha_2}(y_2) \qquad y_1 . x_1 = \phi^{\alpha_1}(y_1)$$

où $x_2 = \phi^{\alpha_2}(f_o(u))$, $x_1 = \phi^{\alpha_1}(u)$ $u \in \Gamma_o$ $(f_o(u), u) = z$ puisque $(x_2, x_1) \in G_\alpha$, ϕ^{α_2} et ϕ^{α_1} étant respectivement des produits de flots de hamiltoniens $\alpha_2^* h$,$\alpha_1^* f_o^* h$ $h \in C^\infty(\Gamma_o^2, R)$ pris dans le même ordre.

On peut écrire de même $y_2 = \tilde{\phi}^{\alpha_2}(f_o(v)) y_1 = \tilde{\phi}^{\alpha_1}(v)$ puisque $(y_2, y_1) \in G_\alpha$.

Tout ceci assure que $y_2 . x_2 = \phi^{\alpha_2} \tilde{\phi}^{\alpha_2}(f_o(v))$

$$y_1 . x_1 = \phi^{\alpha_1} \tilde{\phi}^{\alpha_1}(v)$$

ce qui implique que $(y_2 . x_2, y_1 . x_1) \in G_\alpha$.

La deuxième partie du théorème résulte de ce que la dimension de G_α est $n_1 + n_2$ d'une part, et de ce que $p_1 : \Gamma_2 \times \Gamma_1 \to \Gamma_1$ induit une application $p_1 : G_\alpha \to \Gamma_1$ telle que F_z^α ,où $z = (f_o(u),u)$, se projette sur la partie de $\alpha_1^{-1}(u)$ obtenue par les flots des hamiltoniens $(f_o^* h)$ $(h \in C^\infty(\Gamma_2,\mathbb{R}))$. Ceux-ci n'engendrent $\alpha^{-1}(u)$ que si f_o est une immersion.

Enfin si $n_1 = n_2$ et si f_o est un difféomorphisme,

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^2 \arrow[d, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[d, shift left, "\beta_2"] & G_{\alpha\beta} \arrow[l] \arrow[r] & \Gamma^1 \arrow[d, shift right, "\alpha_1"'] \arrow[d, shift left, "\beta_1"] \\
\Gamma_o^2 & & \Gamma_o^1 \arrow[ll, "f_o"']
\end{tikzcd}$$

par application du théorème des fonctions implicites on construit pour tout $u_o \in \Gamma_o^1$, un voisinage ouvert α_1-distingué de u_o , W_{u_o} et un voisinage ouvert V_{u_o} de u_o tels que

(I) $\alpha_1 : W_{u_o} \to V_{u_o}$

(II) il existe une section s_1 de p_1 au-dessus de W_{u_o} telle que $s_1(V_{u_o}) = V_{u_o}$.

$f_{u_o} = p_2 \circ s_1$ est alors un difféomorphisme symplectique - et donc un isomorphisme local de groupoïdes symplectiques - de W_{u_o} dans Γ^2 .

Γ_o^1 étant paracompacte on peut extraire du recouvrement $(V_{u_o})_{u_o \in \Gamma_o^1}$ un sous recouvrement ouvert localement fini (V_i) ; on note $f_i : W_i \to \Gamma_o^2$ les isomorphismes locaux de groupoïdes symplectiques associés. On pose :

$$W = \{x \in \cup W_i \mid \text{si } x \in W_i \cap W_j \quad f_i(x) = f_j(x)\}$$

tout revient à prouver que W est un voisinage de Γ_o.

Or si $u_o \in \Gamma_o$, on peut trouver $(W_{u_o}, V_{u_o}, f_{u_o})$ tels que si $(V_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ désigne l'ensemble des V_i tels que $u_o \in V_i$,

$$V_{u_o} \subset \bigcap_i^k V_j \qquad W_{u_o} \subset \bigcap_i^k W_j$$

Il reste à voir que $f_j|_{W_{u_o}}$ et $f_i|_{V_{u_o}}$ coïcident sur un voisinage de V_{u_o} dans W_{u_o} ce qui résulte du lemme suivant :

<u>LEMME</u> *Si* $\Gamma^2 \xrightarrow{f} \Gamma^1$ *et* $\Gamma^2 \xrightarrow{g} \Gamma^1$ *sont deux isomorphismes de groupoïdes locaux symplectiques au-dessus de* f_o , f *et* g *ont même germe le long de* Γ_o.

En effet $\bar{g}^1 \circ f$ relève l'identité de Γ_o .

<u>DEMONSTRATION DU COROLLAIRE</u>. On considère

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{p_1} & \Gamma_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \\ G_o & \longrightarrow & \Gamma_o \end{array}$$

et sa restriction $p_1 : \bar{\alpha}^1(u) \longrightarrow \bar{\alpha}_1^1(u)$

Soit $x \in \bar{\alpha}_1^1(u)$ et ϕ^{α_1} un produit de flots hamiltoniens de $(f_o^* h)$ $(h \in C^\infty(\Gamma_o^2, \mathbb{R}))$ reliant u à x. ϕ^{α_1} fournit également un chemin de u à x. Soit ϕ^{α_2} le chemin de Γ^2 issu de $f_o(u)$ et obtenu par le produit des flots hamiltoniens des mêmes $h \in C^\infty(\Gamma_o^2, \mathbb{R})$ pris dans le même ordre. Comme f_o est un difféomorphisme de Poisson et que Γ^2 est un groupoïde le chemin $(\phi^{\alpha_2}, \phi^{\alpha_1})$ relève ϕ^{α_1} dans $\bar{\alpha}^1(u)$ Comme p_1 est un difféomorphisme et que tout chemin de $\bar{\alpha}^1(u)$ peut être approché

par des chemins du type ϕ^{α_1} , $\bar{\alpha}^1(u) \to \bar{\alpha}_1^1(u)$ est un revêtement. Si de plus $\bar{\alpha}^1(u)$ est simplement connexe, c'est un isomorphisme ce qui assure que $G \xrightarrow{p_1} \Gamma_1$ est un difféomorphisme.

C.Q.F.D.

On est maintenant en mesure de prouver le principal résultat de ce chapitre.

<u>THEOREME 1.4</u> : *Pour toute variété <u>paracompacte</u> de Poisson* (Γ_o,Λ_o) *il existe un groupoïde symplectique local <u>séparé</u>* (Γ,σ) *ayant* (Γ_o,Λ_o) *comme ensemble d'unités. De plus* Γ_o *est fermée dans* Γ.

<u>DEMONSTRATION</u> : Γ_o étant paracompacte, le théorème de réalisation locale [W. 1983] et le théorème 1.2 permettent de construire :

. un recouvrement ouvert localement fini $(V_i)_{i \in I}$ de Γ_o.

. pour tout i un groupoïde symplectique local séparé $W_i \underset{\alpha_i}{\overset{\beta_i}{\rightrightarrows}} V_i$ qui est une réalisation stricte de $(V_i,\Lambda_o|_{V_i})$ (α_i,β_i)-connexe.

Soit W la somme disjointe des W_i et $\alpha : W \to \Gamma_o$ défini par $\alpha|_{W_i} = \alpha_i$.

Pour tout $x \in W$ on note (V_j^x) l'ensemble fini des V_j contenant $\alpha(x)$ et $V^x = \cap V_j^x$. V^x est un voisinage ouvert de $\alpha(x)$ et $W^x \to V^x$ un groupoïde local symplectique réalisant V^x. Compte tenu du théorème 1.3 on construit pour chaque j tel que $x \in V_j$, un isomorphisme local de groupoïdes symplectiques

$$\begin{tikzcd} W^x \arrow[r, "\rho_j^x"] \arrow[d] & W_j^x \arrow[d, "\alpha_j"] \\ V^x \arrow[r, hook] & V_j^x \end{tikzcd}$$

et on peut supposer que W^x est la source commune de tous les ρ_j^x .

Soit $\tilde{\Gamma}$ l'ensemble des x ainsi constitué : si $\tilde{x} \in W^i$,$\exists\, x \in W^u$ (où $u = \alpha(x)$) tel que $\tilde{x} = \rho_i^u(x)$.

Sur $\tilde{\Gamma}$ on considère la relation d'équivalence $\tilde{x}_i \sim \tilde{x}_j$ ($\tilde{x}_i \in W^i$, $\tilde{x}_j \in W^j$) si $\alpha_i(\tilde{x}_i) = \alpha_j(\tilde{x}_j) = u$ et si $\exists x \in W^u$, $\tilde{x}_i = \rho_i^u(x)$, $\tilde{x}_j = \rho_j^u(x)$.

On note Γ le quotient. Compte tenu des résultats antérieurs, tout revient à prouver que $\tilde{\Gamma}$ est un voisinage de $\amalg V_i$ ce qui résulte de ce que $\forall\, u \in V_i$ $\tilde{\Gamma} \supset \rho_i^u(W^u)$ qui est ouvert.

C.Q.F.D.

2. ALGEBROIDE DE LIE D'UNE VARIETE DE POISSON ET TROISIEME THEOREME DE LIE LOCAL.

Soit (Γ_o,Λ_o) une variété de Poisson (paracompacte) et $(\Gamma,\sigma) \rightrightarrows \Gamma_o$ le groupoïde local symplectique associé. Tout se passe comme si Γ_o était l'espace des unités d'un groupoïde symplectique. La proposition II.2.1 entraîne :

PROPOSITION 2.1 : *si (Γ_o,Λ_o) est une variété de Poisson $T^*\Gamma_o \to \Gamma_o$ est canoniquement muni d'une structure d'algébroïde de Lie dont la parenthèse est donnée par*

$$\omega_i \in \mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o) \quad (i = 1,2)$$

$$(**) \qquad \{\omega_1,\omega_2\} = \iota_{\Lambda_o^\# \omega_1} d\omega_2 - \iota_{\Lambda_o^\# \omega_2} d\omega_1 + d(\iota_{\Lambda_o}(\omega_1 \wedge \omega_2))$$

et de morphisme de $T^*\Gamma_o$ dans $T\Gamma_o$ $\Lambda_o^\#$.

En particulier $d : (C^\infty(\Gamma_o),\{\ \}) \to (\mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)\{,\})$ est un morphisme d'algèbres de Lie et si $\mathcal{Z}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ désigne l'espace des 1-formes fermées, $\mathcal{Z}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ est un sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$, dont l'idéal dérivé est contenu dans les 1-formes exactes.

REMARQUE : L'existence d'une structure d'algèbre de Lie sur Sect $(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ était connu dans le cas d'une variété symplectique. (cf.[A.M. 1978] par ex.).

Inversement considérons une structure d'algèbroïde de Lie sur $T^*\Gamma_o$. On note $[|,|]$ le crochet sur $\mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ et $\Lambda_o^{\#}$ le morphisme de $T^*\Gamma_o$ dans $T\Gamma_o$. A $\Lambda_o^{\#}$ est associé canoniquement un 2-tenseur contravariant Λ_o défini par $\iota_{\Lambda_o}(\omega_1 \otimes \omega_2) = \langle \Lambda_o^{\#}\omega_1,\omega_2\rangle$. On suppose que

(I) Λ_o est antisymétrique.

(II) $\mathcal{Z}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ est une sous-algèbre de Lie de $(\mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o),[|\ ,\ |])$.

Soit $\{\omega_1,\omega_2\}$ l'application $\mathbb{R}$-bilinéaire définie sur $\mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$ par la formule (**). La condition (I) ci-dessus assure que c'est une forme alternée. On vérifie que

$$(\omega_1,\omega_2) \to [|\omega_1,\omega_2|] - \{\omega_1,\omega_2\}$$

est $C^\infty(\Gamma_o,\mathbb{R})$-bilinéaire. Ceci entraîne l'existence d'un tenseur $T \in \mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o \otimes \Lambda^2 T\Gamma_o)$ tel que $[|\omega_1,\omega_2|] - \{\omega_1,\omega_2\} = \iota(T)(\omega_1 \wedge \omega_2)$.

Soit $U = (x^i)$ un ouvert, connexe et simplement connexe, de coordonnées locales et $T^{ij} = \iota(T)(dx^i \wedge dx^j)$.

La condition (II) implique que T^{ij} est une 1-forme fermée. Comme pour tout couple (f,g) d'applications C^∞ sur Γ_o $d(T(df,dg)) = 0$, on peut, au-dessus de U, écrire $\forall (f,g) \in C^\infty(\Gamma_o,\mathbb{R})$ $\sum_{i<j} T^{ij} \wedge d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^i}\right) = 0$

on prend successivement $f = x^{i_o}$ $g = (x^{j_o})^2$, puis $f = (x^{i_o})^2$ $g = x^{j_o}$ où $i_o < j_o$. Il en résulte que $T^{i_oj_o} \wedge dx^{j_o} = 0 = T^{i_oj_o} \wedge dx^{i_o}$ ce qui implique que $T^{i_oj_o} = 0$.

On a prouvé :

<u>PROPOSITION 2.1</u> : *Un algébroïde de Lie sur* $T^*\Gamma_o \to \Gamma_o$ *de crochet* $[|,|]$ *sur* $\mathrm{Sect}(\Gamma_o,T^*\Gamma_o)$, *de morphisme* $\Lambda_o^{\#} : T^*\Gamma_o \to T\Gamma_o$ *est l'algébroïde de*

Lie d'une structure de Poisson sur M *de 2-tenseur* Λ_o *ssi*

(I) Λ_o *est antisymétrique*
(II) $\mathcal{X}(\Gamma_o, T^*\Gamma_o)$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{Sect}(\Gamma_o, T^*\Gamma_o), [|,|])$.

Un tel algébroïde de Lie sera appelé algébroïde symplectique. Le théorème 1.4 s'interprète alors ainsi : un algébroïde aymplectique est l'algébroïde d'un groupoïde local symplectique. Le théorème 1.4 apparaît comme l'extension à certains algébroïdes du 3° théorème de Lie sur la réalisation d'une algèbre de Lie de dimension m finie par un groupe (local) de Lie. Autrement dit encore la borne généralisation en dimension infinie de la notion d'algèbre de Lie duale est celle de variété de Poisson. Il est donc légitime d'appeler "3° théorème de Lie local" pour les variétés de Poisson le théorème 1.4 ou sa forme équivalente :

THEOREME 2.1 : "Troisième théorème de Lie local"

Un algébroïde de Lie sur $T^*\Gamma_o \to \Gamma_o$ *est l'algébroïde de Lie d'un groupoïde local symplectique d'unités* Γ_o *si et seulement si c'est un algébroïde symplectique.*

REMARQUE 1 : J. PRADINES [Pr. 1968] a prouvé pour tout algébroïde de Lie l'existence d'un groupoïde local dont il est l'algébroïde. Le résultat ici énoncé est plus fin : à tout algébroïde symplectique est associé un groupoïde local symplectique.

REMARQUE 2 : Soit M une variété de dimension 2n munie d'un 2-forme σ de rang maximum non fermée. $T^*M \to M$ est muni d'une structure d'algébroïde de Lie qui n'est pas symplrctique , de crochet défini par $[|\omega_1, \omega_2|] = -\iota_{[X_1, X_2]}\sigma$ où $-\iota_{X_i}\sigma = \omega_i$ et de morphisme $\Lambda^\#$ défini par $\Lambda^\#\omega_i = X_i$. La condition (II) ci-dessus équivaut dans ce cas à $d\sigma = 0$.

§ 3. REALISATIONS SYMPLECTIQUES ET QUANTIFICATION

3.1. Ressemblances formelles :

On peut établir une espèce de dictionnaire entre la théorie des groupoïdes symplectiques d'une part et celle des $\mathbb{C}^*$-algèbres d'autre part :

Sous-variété lagrangiennes	Eléments de l'algèbre
L'inversion i	La conjugaison
Le produit	Le produit tensoriel
La réunion	La somme
Les bissections lagrangiennes	Les éléments unitaires
Sous-groupoïdes lagrangiens	Projecteurs auto-adjoints
	etc...

Si par exemple $\Lambda : \Gamma' \to \Gamma$ est un homomorphisme de groupoïdes, en l'appliquant à Γ'_o on obtient une réunion de sous-groupoïdes lagrangiens (i.e. une somme de projecteurs auto-adjoints). Si $\Gamma' = -M \times M$ (ou $\Pi(M)$), on obtient l'analogue d'une représentation et $\Lambda_o \Gamma'_o$ peut alors être considéré comme la trace de la représentation (en fait la trace est une fonctionnelle linéaire plutôt qu'un élément de l'algèbre, mais la structure symplectique donne une espèce de produit scalaire sur les éléments). La "trace" de la représentation triviale est Γ_o.

3.2 Qu'en est-il si l'on peut vraiment quantifier ?

Supposons que, en tant que variété symplectique Γ soit préquantifiable de sorte que l'on puisse construire les sections d'un fibré en droites, polarisations, etc.... bref que l'on ait associé à un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ de façon que la multiplication du groupoïde définisse un élément de $\mathscr{H}^* \otimes \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ et donc une opération de $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ vérifiant les propriétés formelles d'une algèbre. L'identification de certaines bissections lagrangiennes avec les fonctions sur Γ_o permettrait d'induire, via la multiplication des opérateurs, un produit associatif sur $C^\infty(\Gamma_o)$. Tout ceci ne peut être attendu, en général, qu'au niveau asymptotique.

3.3. Groupoïdes et Star-produit.

Etant donné un groupoïde symplectique (Γ, Γ_o), la géométrie symplectique de Γ est, près de Γ_o, identique à celle d'un voisinage de la section nulle dans $T^*(\Gamma_o)$; on a donc, au moins dans un voisinage de la section nulle, un morphisme de Poisson $\alpha^* : C^\infty(\Gamma_o) \to C^\infty(T^*\Gamma_o)$.

A chaque fonction sur Γ_o on peut associer une série formelle sur $T^*(\Gamma_o)$ (le jet d'ordre ∞ de $\alpha^* f$ sur Γ_o). Si on place une métrique riemannienne sur Γ_o on

peut associer à chaque série formelle un opérateur différentiel "formel" d'ordre infini (calcul symbolique "total") ; ceci donne un produit associatif sur les séries formelles qu'on peut tenter de rappatrier dans $\alpha^*(C^\infty(\Gamma_o))$ et donc dans $C^\infty(\Gamma_o)$. Ce produit associatif sera une espèce d' "algèbre enveloppante" pour le crochet de Poisson sur $C^\infty(\Gamma_o)$. Une telle algèbre enveloppante pour des structures de Poisson, autres que les structures de Lie-Poisson, ont été considérées en connexion avec les équations de Yang-Baxter par DRINFELD [Dr. 1983] KARASEV [K. 1987] La structure globale du groupoïde est certainement utile pour comprendre cette notion d'algèbre enveloppante.

3.4. CONCLUSION : L'étude géométrique développé dans cet article a clarifié en quoi une variété de Poisson est la bonne généralisation en dimension infini de la notion de dual d'algèbre de Lie. Un troisième théorème de Lie local a été établi grâce à l'introduction de la notion de groupoïde symplectique. Le programme esquissé dans les lignes précédentes visant par le moyen des groupoïdes symplectiques à unifier différents aspects de la quantification notamment avec les *-produits de Lichnerowicz est ambitieux. Il rejoint les préoccupations de Karasev et Maslov. Des avancées dans cette direction dépendrait finalement l'intérêt de la notion de groupoïde symplectique, surtout s'il apparaît que le cadre "linéaire" des variétés de Lie-Poisson est trop étroit et que l'on a besoin de la catégorie de toutes les variétés de Poisson.

APPENDICE

§ 1. REDUCTIONS SYMPLECTIQUES

1. Le cas linéaire : Soit E un espace vectoriel symplectique, $W \subset E$ un sous- espace coïsotrope (i.e. $W^{\perp} \subset W$) alors le quotient $E_W = W/W^{\perp}$ est un espace symplectique.

PROPOSITION A1 : *Pour tout sous-espace lagrangien λ de E, $\lambda_W = \lambda \cap W$, $\lambda \cap W^{\perp}$ est un sous-espace lagrangien de E_W.*

Si, pour chaque $k = 0,1,\ldots$, on note $\Lambda_{k,W}(E)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens λ de E tels que $\dim(\lambda \cap W) = k$, c'est une sous-variété de la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(E)$ et l'application $\lambda \to \lambda_W$ est différentiable de $\Lambda_{k,W}(E)$ dans $\Lambda(E_W)$; (mais elle n'est même pas continue sur $\Lambda(E)$).

2. Le cas non-linéaire :

Si (S,ω) est une variété symplectique, M une sous-variété coïsotrope de S. le feuilletage caractéristique $\mathcal{M}^{\perp}$ est transversalement symplectique et si l'espace des feuilles est une variété c'est une variété symplectique.

PROPOSITION A2 : *Pour chaque sous-variété lagrangienne L de S qui coupe proprement M, $L_M = L \cap M/L \cap \mathcal{M}^{\perp}$ est une immersion lagrangienne dans M.*

§ 2. RELATIONS CANONIQUES :

1. Le cas linéaire : E et F étant deux espaces vectoriels symplectiques, -F l'espace F munit de la structure symplectique opposée à celle de F, un sous-espace lagrangien de Ex(-F) s'appelle une relation canonique de E à F. Etant donnés trois espaces symplectiques E,F,G, notons Δ_F la diagonale de $F \times F$; $E \times \Delta_F \times (-G)$ est un eous-espace coïsotrope de $Ex(-F) \times F \times (-G)$ dont l'orthogonal est $\{0\} \times \Delta_F \times \{0\}$. Le quotient est donc naturellement isomorphe à Ex(-G). Donc, pour des relations canoniques L_1 de E à F et L_2 de F à G on peut réduire $L_1 \times L_2$ pour obtenir un sous-espace lagrangien $L_1 \circ L_2$ de Ex(-G).

Les espaces vectoriels symplectiques, avec les relations canoniques comme morphismes, constituent ainsi une catégorie.

2. Le cas non-linéaire : On peut, avec quelques restrictions, étendre les constructions précédentes aux sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique. De façon précise, si M_1, M_2, M_3 sont trois variétés symplectiques, K (resp. L) une sous-variété lagrangienne de $M_1 x(-M_2)$ (resp. de $M_2 x(-M_3)$) et si $K \times L$ coupe proprement $M_1 \times \Delta\ M_2 \times M_3$ alors K.L est une sous-variété (immergée) lagrangienne de $M_1 x(-M_3)$.

On dit que deux sous-variétés se coupent proprement si leur intersection est une sous-variété et si le fibré tangent à l'intersection est l'intersection des fibrés tangents.

REMARQUE : Dans les applications que l'on fait ici de ce résultat on sait par ailleurs que K.L est une sous-variété plongée.

CAS PARTICULIER : Si M_1 est réduite à un point, une sous-variété lagrangienne de $M_1 x(-M_2)$ est simplement une sous-variété lagrangienne de M_2 et la construction précédente nous permet de parler de l'image par une relation canonique d'une sous-variété lagrangienne.

§ 3. METHODE DES CARACTERISTIQUES

Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension 2n, W une sous-variété coïsotrope de dimension 2n - k, $\mathcal{F}$ l'orthogonal symplectique du fibré tangent à W et J une sous-variété isotrope de dimension n-k de M ; on suppose que, en chaque x de J, $T_x J \cap \mathcal{F}_x = \{0\}$, alors si $L = \coprod_{x \in J} F_x$ où F_x est la famille de $\mathcal{F}$ passant par x et si $j : L \to W$ est l'inclusion canonique, il existe sur L une structure de variété différentielle de dimension n qui fait de j une immersion lagrangienne et L est maximale pour J fixée. Cette structure est définie ainsi si $y_o \in F_{x_o}$, il existe un produit ϕ de flots de hamiltoniens, constants sur W, tels que $y_o = \phi(x_o)$. Il existe d'autre part un voisinage ouvert distingué W_{x_o} de $\mathcal{F}$ en x_o et une sous-variété V_{x_o} de W_{x_o} transverse à $\mathcal{F}$ tels que

(I) $W_{x_o} \cap J = V_{x_o} \cap J$

(II) les plaques de $\mathcal{F}$ dans W_{x_o} sont les fibres d'une submersion $p : W_{x_o} \to V_{x_o}$.

$p^{-1}(V_{x_o} \cap J)$ est une sous-variété lagrangienne et il existe une injection ψ (ensembliste) canonique de $p^{-1}(V_{x_o} \cap J)$ dans L. On décide

1) que $\psi(p^{-1}(V_{x_o} \cap J))$ est une carte de L en x_o.

2) Que ϕ qui est défini au voisinage de x_o dans $V_{x_o} \cap J$ est un difféomorphisme local de L ,

et on vérifie que l'on a ainsi défini sur L une structure de variété pour laquelle l'application canonique donnée par l'inclusion est une immersion lagrangienne non injective en général.

BIBLIOGRAPHIE

[A. M. 1978] R. ABRAHAM et J.E. MARSDEN, Foundations of Mechanics, Benjamin Ed. 1978.

[Al. Mo 1985] R. ALMEIDA et P. MOLINO, Suites d'Atiyah et feuilletages transversalement complets. C.R. Acad. Sc. Paris Ser. I (300) 13-15.

[B.F.F.L.S. 1978] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ and D. STERNHAIMER, Deformation theory and quantization, Ann. Phys. 111 (1978), 61-151.

[C. 1982] A. CONNES, A survey of foliations and operator algebras, in operator Algebras and Applications (Kadison ed.) Proc. Symp. Pure Math. , Vol. 38, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. (1982), 521-628.

[D. 1985] P. DAZORD, Feuilletages à singularités, Indag. Math. Volumen 47 (1) (1985) 21-39.

[DO. LA. 1966] A. DOUADY et M. LAZARD, Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes, Invent. Math. 1 (1966), 133-151.

[Dr. 1983] V.G. DRINFEL'D , Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometrical meaning of the classical Yang-Baxter equations. Soviet Math. Dokl Vol. 27 (1983) n° 1.

[Du. He. 1982] J.J. DUISTERMAAT and H.J. HECKMAN, On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space, Invent. Math. 69 (1982), 259-268.

[E.] C. EHRESMANN, Oeuvres complètes.

[V.E. 1984)] W.T. van EST, Rapport sur les S-atlas, Structure transverse des feuilletages, Astérisque 116 (1984) 235-292.

[V.E. 1987] W.T. van EST, Une démonstration de E. Cartan du 3ème théorème de Lie. A paraître dans 'Actions hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie ". Travaux en Cours. Hermann Editeur.

[V.E.K. 1964] W.T. van EST et T.J. KORTKAGEN, Non enlargible Lie algebra, Indag. Math. 26 (1964), 15-31.

[V.E. VL. 1987] W.T. van EST et M. van der LEE, On the enlargibility criteria for local groups due to Malov and Cartan. A paraître dans "Actions hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie". Coll. Travaux en Cours. Hermann Editeur.

[G. 1958] R. GODEMENT, Théorie des faisceaux , Actualités Scientifiques et Industrielles, 1252. Hermann Ed. Paris.

[H. 1984] A. HAEFLIGER, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, Structure transverse des Feuilletages, Astérisque 116 (1984), 70-97.

[K. 1985] M.V. KARASEV, Quantization of non linear Lie-Poisson brackets in quasi-classical approximation, Preprint ITF Akad. Nauk SSR, ITF - 85 - 72 R, KIEV (1985).

[K. 1986] M.V. KARASEV, Poisson symmetry algebras and the asymptotics of spectral series, Functional Anal. Appl. 20 (1986), 17-26.

[K. M. 1981] M.V. KARASEV and V.P. MASLOV, Operators with general commutation relations and their applications I, Unitary- non linear operator equations, J. Soviet Math. 15 (1981), 273-368.

[K. M. 1984] M.V. KARASEV and V.P. MASLOV, Asymptotic and geometric quantization Russian Math. Surveys 39 - 6 (1984), 133-205.

[Ki. 1976] A.A. KIRILLOV, Local Lie algebra. Russ. Math. Surveys (31) 55-75 1976.

[Lib. 1972] P. LIBERMANN, Sur les groupoïdes différentiables et le "presque parallélisme", Symposia Math. 10 (1972), 59-93.

[Lib. 1983] P. LIBERMANN, Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique, Astérisque 107-108 (1983), 43-69.

[Lic. 1955] A. LICHNEROWICZ, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Ed. Cremonese Rome 1955.

[Lic. 1977] A. LICHNEROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Diff. Geom. 12, (1977), 253-300.

[Lic. 1982] A. LICHNEROWICZ, Variétés de Poisson et feuilletages. Ann. Fac. Sc. Toulouse, Vol. IV 1982. 195-262.

[M. W.] K. MIKAMI and A. WEINSTEIN, en préparation.

[Pl. 1980] M. PLAISANT, Q-variétés banachiques. Application à l'intégrabilité des algèbres de Lie, C.R. Acad. Sc. Paris 290 A (1980), 185-188.

[Pr. 1966] J. PRADINES, C.R. Acad. Sc. Paris 263 (1966), 907-910.

[Pr. 1967] J. PRADINES, Théorie de Lie par les groupoïdes différentiables, C.R. Acad. Sc. Paris 264 A (1967), 245-248.

[Pr. 1968] J. PRADINES, Troisième théorème de Lie sur les groupoïdes différentiables C.R. Acad. Sc. Paris 267 (1968), 21-23.

[Pr. 1984] J. PRADINES, Holonomie et grapes locaux, C.R. Acad. Sc. Paris 298 A (1984), 297-300.

[Pr. 1985] J. PRADINES,

[R. 1980] J. RENAULT, A groupoïd approach to C^*-algebras, Lecture Notes in Math., Vol. 793, Springer-Verlag 1980.

[S. 1977] STERNBERG, On minimal coupling and the symplecti mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field. Proc. Nat. Acad. Sc. 74 (1977) - 5253-5254.

[S.T.S. 1983] M.A. SEMENOV-TYAN-SHANSKII, What is a classical R-matrix ? Functional Anal. Appl. 17 (1983), 259-272.

[St. 1974] P. STEFAN, Accessibility and foliations with singularities, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1142-1145.

[Su. 1973] H.J. SUSSMANN, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, Trans. of Amer. Math. Soc., 180 (1973), 171-188.

[W. 1978] A. WEINSTEIN, A universal phase space for particles in Yan-Mills fields, Lett. Math. Phys. 2 (1978), 417-420.

[W. 1979] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds Regional Conferences series in Math. n° 29, Amer. Math. Soc.

[W. 1981] A. WEINSTEIN, Symplectic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 5 (1981) 1-13.

[W. 1983] A. WEINSTEIN, The local Structure of Poisson manifolds, J. Diff. Geom. 18 (1983), 523-557.

[W. 1987] A. WEINSTEIN, Symplectic groupoïds and Poisson manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1987), 101-103.

[W. 1987 b] A. WEINSTEIN, Poisson geometry of the principal series and non linearizable structure, preprint.