GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Sur les variétés abéliennes à multiplications réelles.* Note (*) de **Kenneth Ribet**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Une conjecture de Tate relie les endomorphismes d'une variété abélienne A sur un corps de nombres avec les endomorphismes de certains modules galoisiens. On démontre cette conjecture dans le cas où A est à multiplications réelles et satisfait à une hypothèse de mauvaise réduction. On obtient ainsi des isogénies entre facteurs de jacobiennes de certaines courbes modulaires sur $\mathbb{Q}$.

Let A be an Abelian variety over a number field. A conjecture of Tate relates the endomorphisms of A with endomorphisms of certain Galois modules attached to A. We prove this conjecture when A has real multiplication and satisfies a suitable bad reduction hypothesis. As an application, we show that the new part of $J_0(N)$, when N is a square-free product of an even number of prime numbers, is isogenous to the Jacobian of a Shimura curve.

1. Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres k. Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et G le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$. Soit l un nombre premier, et soit $V = V_l(A)$ le module de Tate $\mathbb{Q}_l$-adique attaché à A. Le groupe G et l'algèbre $\operatorname{End}_k A$ des k-endomorphismes de A agissent sur V. D'après Weil, l'homomorphisme

$$i: \quad (\operatorname{End}_k A) \otimes \mathbb{Q}_l \to \operatorname{End}_G V,$$

qui provient de l'action de $\operatorname{End}_k A$ sur l'espace V, est injectif. On conjecture (Tate) qu'il est bijectif [7].

Considérons maintenant deux hypothèses sur A :

(*a*) La variété A est à multiplications réelles, autrement dit l'algèbre $(\operatorname{End} A) \otimes \mathbb{Q}$ contient une $\mathbb{Q}$-algèbre E, produit de corps de nombres totalement réels, de rang égal à la dimension de A.

(*b*) Aucun facteur non nul de A (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) n'a partout bonne réduction.

THÉORÈME 1. — *Si* (*a*) *et* (*b*) *sont satisfaites, alors l'application i est un isomorphisme.*

(Autrement dit, la conjecture de Tate est vraie pour toute variété abélienne à multiplications réelles qui satisfait à une hypothèse convenable de mauvaise réduction. Ceci a été démontré par Serre [5] dans le cas où A est un produit de deux courbes elliptiques, et par l'auteur [4] dans le cas où E est un corps.)

Démonstration. — Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer que les endomorphismes de A sont définis sur k. Soit S un ensemble fini de places de k contenant les places à l'infini et les places en lesquelles A a mauvaise réduction. Pour $v \notin S$, soit $a_v \in E$ la trace (relativement à E) de l'endomorphisme de Frobenius π_v de la réduction de A en v. (Pour $v \nmid l$, a_v est la trace de l'endomorphisme de V induit par π_v quand on regarde V comme un E-module libre de rang 2.) Soit F la sous-algèbre de E engendrée par les a_v; il est facile de voir, en appliquant le théorème de Čebotarev, que F est indépendante du choix de S.

LEMME. — *Le centre de la $\mathbb{Q}_l$-algèbre* $\operatorname{End}_G V$ *est l'algèbre* $F \otimes \mathbb{Q}_l$. *On a un isomorphisme*

$$(\operatorname{End}_G V) \otimes_{\mathbb{Q}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq (\operatorname{End}_F E) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_l.$$

En particulier, la dimension de $\operatorname{End}_G V$ est indépendante de l.

Démonstration du lemme. — La décomposition de E en produit de corps E_α induit une décomposition de A (à isogénie près) en produit de variétés abéliennes A_α sur k, du type étudié dans [4], chap. IV, § 3. Comme le théorème démontré à cet endroit s'applique à chaque A_α, on obtient une description du $\overline{\mathbb{Q}}_l[G]$-module $V \otimes_{\mathbb{Q}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ (*voir* [4], (4.4.4), (4.4.5) et (4.4.6)). Le lemme en résulte.

Reprenons maintenant la démonstration du théorème. On traite d'abord un cas particulier :

Il existe une place v (non archimédienne) de k en laquelle aucun facteur non nul de A *ne possède potentiellement bonne réduction.*

Soit k_v le complété de k en v. On voit facilement (*cf.* [4], (3.6.1)) que A devient, sur une extension finie de k_v, une variété abélienne « dégénérante » au sens de Mumford [3] (*voir* aussi [4], chap. III). En remplaçant k de nouveau par une extension finie, on se ramène au cas où A est « dégénérante » sur k_v. On va également supposer que l est égal à p, caractéristique résiduelle de k. Ceci est permis par le lemme, qui implique que la conjecture de Tate est vraie pour un l si et seulement si elle est vraie pour tout l.

Soit $D \subset G$ un groupe de décomposition en v. Soit Z l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ noté $M \otimes \mathbb{Q}$ dans [4], chap. III, § 4. On dispose d'une action fidèle de $(\mathrm{End}\ A) \otimes \mathbb{Q}$ sur Z; ceci, et le fait que la dimension de Z est égale à la dimension de A, implique que Z est un E-module libre de rang 1. Le plongement

$$(\mathrm{End}\ A) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\ Z,$$

se prolonge en un plongement

$$\mathrm{End}_D\ V \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(Z \otimes \mathbb{Q}_p),$$

tel que $(\mathrm{End}\ A) \otimes \mathbb{Q}$ soit l'intersection de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\ Z$ avec $\mathrm{End}_D\ V$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(Z \otimes \mathbb{Q}_p)$ (*voir* [4], (3.4.7)). En regardant ces plongements comme des inclusions, on a :

$$F \otimes \mathbb{Q}_p \subseteq \mathrm{End}_G\ V \subseteq \mathrm{End}_D\ V \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(Z \otimes \mathbb{Q}_p).$$

Soit $C = (\mathrm{End}_F\ Z) \otimes \mathbb{Q}_p$ le commutant de $F \otimes \mathbb{Q}_p$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(Z \otimes \mathbb{Q}_p)$. Comme Z et E sont F-isomorphes, la dimension de C est celle de $\mathrm{End}_G\ V$, grâce au lemme. On a alors

$$C = \mathrm{End}_G\ V,$$

puisque $F \otimes \mathbb{Q}_p$ est le centre de $\mathrm{End}_G\ V$. *A fortiori*, on a

$$\mathrm{End}_F(Z) \subseteq \mathrm{End}_D\ V \cap \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(Z) = (\mathrm{End}\ A) \otimes \mathbb{Q},$$

d'où la conjecture par un argument de dimensions.

Traitons maintenant le cas général. La décomposition $A \simeq \prod A_\alpha$ déduite de la décomposition de E induit en particulier une décomposition $V = \oplus V_\alpha$ de V. Il s'agit de vérifier, pour chaque couple α, β, que l'injection

$$i_{\alpha,\beta} : \quad \mathrm{Hom}(A_\alpha, A_\beta) \otimes \mathbb{Q}_l \to \mathrm{Hom}_G(V_\alpha, V_\beta)$$

est en fait un isomorphisme. Ici encore, on peut ne faire la vérification que pour un l bien choisi; on prend l complètement décomposé dans chacun des E_α et tel que A ait bonne réduction en les places de k divisant l. Fixons α et β, et soit v une place de k où A_α est potentiellement « dégénérante ». Alors, le $\mathbb{Q}_l[G]$-module V_α se décompose en une somme directe de modules $V_{\alpha,\lambda}$ (selon les places λ de E qui divisent l). Chaque $V_{\alpha,\lambda}$ est simple et ramifié en v [4], (4.3.1), (3.5.2). Si $\mathrm{Hom}_G(V_\alpha, V_\beta)$ est nul, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, le G-module V_β est ramifié en v. En appliquant le critère de Ogg-Néron-Chafarevitch, on voit que A_β est potentiellement « dégénérante » en v. Le cas particulier s'applique alors au produit $A_\alpha \times A_\beta$, et on en déduit que $i_{\alpha, \beta}$ est un isomorphisme.

2. Prenons maintenant $k = \mathbb{Q}$, et soit N un produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts. Soit $J_0(N)$ la jacobienne de la courbe modulaire $X_0(N)/\mathbb{Q}$, et soit A sa partie primitive [« new part » — définie comme sous-variété ou comme quotient de $J_0(N)$, au goût du lecteur]. Soit $\mathbb{H}$ l'algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ qui est ramifiée en chaque p divisant N et non ramifiée ailleurs. Soit $X/\mathbb{Q}$ la courbe de Shimura attachée à un ordre maximal de $\mathbb{H}$, et soit B la jacobienne de X.

Théorème 2. — *Les variétés* A *et* B *sont isogènes sur* $\mathbb{Q}$.

Ceci répond affirmativement à une question de B. Mazur.

Démonstration. — Il est bien connu que A et B sont des variétés abéliennes à multiplications réelles, les algèbres réelles étant des algèbres de Hecke convenables. De plus, on sait que A vérifie la condition (*b*) du théorème 1, *cf.* [2]; elle est potentiellement « dégénérante » en chaque nombre premier p qui divise N.

Lemme. — *Les modules de Tate attachés à* A *et à* B *sont* $\mathbb{Q}_l[G]$-*isomorphes*.

Démonstration. — Soit V_A (resp. V_B) le module de Tate attaché à A (resp. B). Pour chaque nombre premier $p \nmid l$ N, soit $F_p \in G$ un élément de Frobenius en p. La formule de Eichler-Shimura montre que la trace de l'automorphisme induit par F_p sur le $\mathbb{Q}_l$-module V_A coïncide avec la trace de l'opérateur de Hecke T_p agissant sur l'espace des formes primitives de poids 2 sur Γ_0 (N). Or, il est bien connu que cette dernière trace est égale à la trace de l'opérateur de Hecke T_p agissant sur l'espace des formes automorphes de poids 2 sur Γ, le groupe des éléments de norme réduite 1 dans un ordre maximal de $\mathbb{H}$. (L'égalité en question est une conséquence facile du théorème 4.1 de [6].) De la formule de Eichler-Shimura, et du théorème de Čebotarev, on déduit que les représentations V_A et V_B ont même caractère. Comme V_A est semi-simple, le lemme en résulte.

En appliquant le lemme pour un l bien choisi, on voit comme ci-dessus que B est potentiellement « dégénérante » en chaque p qui divise N. (Ceci est précisé par un théorème de Čerednik [1], qui décrit X sur $\mathbb{Q}_p$ comme une courbe « dégénérante ».) En particulier, B vérifie (*b*). Le théorème 1 implique donc la conjecture de Tate pour la variété $A \times B$. Le théorème 2 résulte maintenant du lemme, par un argument facile ([8], p. 139).

(*) Remise le 7 juillet 1980.

[1] I. V. Čerednik, *Mat. Sbor.*, 100, 1976 (*Math. U.S.S.R. Sbornik*, 29, 1976, p. 55-78).

[2] P. Deligne et M. Rapoport, *Lecture Notes in Math.*, 349, 1973, p. 143-316.

[3] D. Mumford, *Compositio Math.*, 24, 1972, p. 239-272.

[4] K. Ribet, *Amer. J. Math.*, 98, 1976, p. 751-804.

[5] J.-P. Serre, *Abelian l-adic Representations and Elliptic Curves*, Benjamin, New York, 1968.

[6] H. Shimizu, *Ann. of Math.*, 81, 1965, p. 166-193.

[7] J. Tate, *Algebraic Cycles and Poles of Zeta Functions, Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper and Row, New York, 1966.

[8] J. Tate, *Invent. Math.*, 2, 1966, p. 134-144.

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 *Palaiseau Cedex;*
Mathematics Department, U.C. Berkeley, Berkeley, CA 94720 (*U.S.A.*).