Autour de Deligne-Illusie

une appréciation personelle, juin, 2005

Deux parties

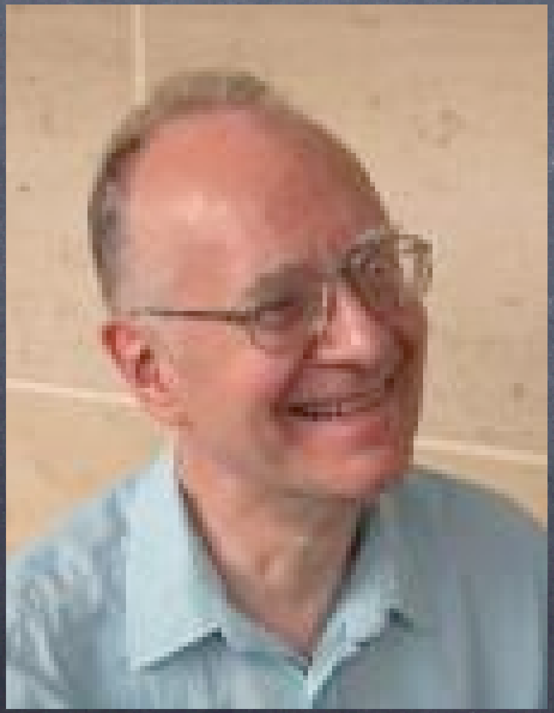
- Bénéfices d'être autour de D.-I.
- Compléments sur l'article [D-I].

(avec V. Vologodsky)

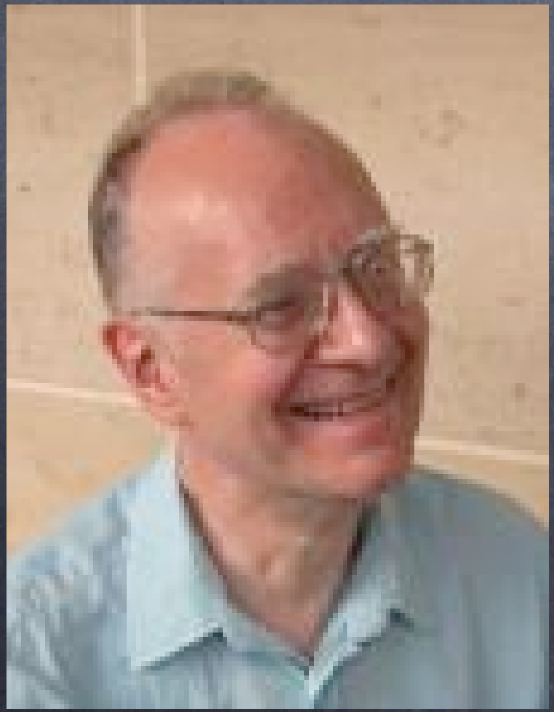
Bienvenu à L'I.H.E.S. et Orsay

téléphone
08 36 68 77 14
2,23 F la minute
minitel
36 15 RATP
internet
www.ratp.fr
La Défense Grande Arche
Pont de Levallois Bécon
Porte de Clignancourt
Porte de la Chapelle
Porte des Lilas
Mairie des Lilas
Pré-Saint-Gervais
Gallieni
Gambetta
Mairie de Montreuil
Château de Vincennes
Porte Dauphine
Boulogne Pont de St-Cloud
Pont de Sèvres
Balard
Place d'Italie
Bibliothèque François Mitterrand
Gare d'Austerlitz
Louis Blanc
Ch. de Gaulle Étoile
Madeleine
Châtelet
Havre Caumartin
Nation
St-Germain-en-Laye
Cergy
Poissy
Chelles Gournay
Villiers-s-Marne Le Plessis Trévise
Boissy-St-Léger
Marne-la-Vallée Port Disneyland
Funiculaire de Montmartre
Marie de St-Ouen
St-Ouen
Garibaldi
Stade de France St-Denis
La Plaine Stade de France
Fort d'Aubervilliers
Aubervilliers-Pantin Quatre Chemins
Pantin
Mairie de Clichy
Porte de St-Ouen
Guy Môquet
Porte de Clichy
Brochant
Simplon
Jules Joffrin
Lamarck Caulaincourt
Marcadet Poissonniers
Marx Dormoy
Porte de la Villette
Bobigny-Pantin R. Queneau
Corentin Cariou
Église de Pantin
Crimée
Hoche
Porte de Pantin
Abbesses
Château Rouge
La Chapelle
Riquet
Ourcq
La Fourche
Blanche
Pigalle
Anvers
Barbès Rochechouart
Stalingrad
Jaurès
Laumière
Anatole France
Louise Michel
Porte de Champerret
Pereire
Wagram
Place de Clichy
Rome
Liège
St-Georges
Trinité d'Estienne d'Orves
Notre-Dame-de-Lorette
Gare du Nord
Magenta
Bolivar
Danube
Botzaris
Buttes Chaumont
Télégraphe
Malesherbes
Villiers
Gare St-Lazare
Le Peletier
Poissonnière
Cadet
Gare de l'Est
Château Landon
Jourdain
Place des Fêtes
Monceau
Europe
St-Lazare
Chaussée d'Antin La Fayette
Courcelles
Ternes
St-Augustin
Auber
Richelieu Drouot
Grands Boulevards
Château d'Eau
Jacques Bonsergent
Colonel Fabien
Pyrénées
St-Fargeau
Pelleport
Belleville
Goncourt
Esplanade de la Défense
Pont de Neuilly
Les Sablons
Porte Maillot
Argentine
Miromesnil
St-Philippe du Roule
Opéra
Quatre Septembre
Bonne Nouvelle
Strasbourg St-Denis
République
Couronnes
Ménilmontant
Porte de Bagnolet
George V
Kléber
Victor Hugo
Franklin D. Roosevelt
Bourse
Sentier
Temple
Parmentier
Av. Foch
Boissière
Rue de la Pompe
Champs-Élysées Clemenceau
Concorde
Pyramides
Réaumur Sébastopol
Arts et Métiers
Rue St-Maur
Père Lachaise
Philippe Auguste
Croix de Chavaux
Av. Henri Martin
Iéna
Alma Marceau
Tuileries
Louvre Rivoli
Les Halles
Étienne Marcel
Rambuteau
Filles du Calvaire
Oberkampf
St-Ambroise
Trocadéro
Invalides
Palais Royal Musée du Louvre
Châtelet Les Halles
St-Sébastien Froissart
Richard Lenoir
Voltaire
Alexandre Dumas
Robespierre
Porte de Montreuil
La Muette
Pont de l'Alma
La Tour Maubourg
Assemblée Nationale
Musée d'Orsay
Pont Neuf
Chemin Vert
Hôtel de Ville
Charonne
Bréguet Sabin
Avron
Maraîchers
Boulainvilliers
Ranelagh
Jasmin
Kennedy Radio France
Passy
Champ de Mars Tour Eiffel
Bir-Hakeim
Varenne
St-François Xavier
École Militaire
Solférino
Rue du Bac
St-Germain des-Prés
Cité
St-Michel
Pont Marie
St-Paul
Sully Morland
Bastille
Ledru Rollin
Rue des Boulets
Buzenval
Porte de Vincennes
St-Michel Notre-Dame
Faidherbe Chaligny
La Motte Picquet Grenelle
Porte d'Auteuil
Michel-Ange Auteuil
Église d'Auteuil
Dupleix
Ségur
Vaneau
Sèvres Babylone
Mabillon
Odéon
Maubert Mutualité
Reuilly Diderot
Picpus
St-Mandé Tourelle
Bérault
Charles Michels
Duroc
St-Sulpice
Cluny La Sorbonne
Quai de la Rapée
Montgallet
Michel-Ange Molitor
Javel A. Citroën
Rennes
Cardinal Lemoine
Bel-Air
Boulogne Jean Jaurès
Chardon Lagache
Mirabeau
Av. Émile Zola
Cambronne
Sèvres Lecourbe
St-Placide
Notre-Dame des-Champs
Jussieu
Gare de Lyon
Daumesnil
Commerce
Falguière
Montparnasse Bienvenüe
Luxembourg
Place Monge
Michel Bizot
Exelmans
Pasteur
Vavin
Dugommier
Félix Faure
Volontaires
Port Royal
Censier Daubenton
Bercy
Porte Dorée
Boucicaut
Gaîté
Edgar Quinet
St-Marcel
Quai de la Gare
Porte de Charenton
Porte de St-Cloud
Lourmel
Montparnasse
Raspail
Campo Formio
Liberté
Marcel Sembat
Billancourt
Bd Victor
Vaugirard
Denfert Rochereau
St-Jacques
Chevaleret
Cour St-Émilion
Charenton Écoles
Convention
Pernety
Les Gobelins
Bd Masséna
École Vétérinaire de Maisons-Alfort
Mouton Duvernet
Glacière
Maisons-Alfort Stade
Porte de Versailles
Plaisance
Corvisart
Nationale
Maisons-Alfort Les Juilliottes
Issy Val de Seine
Corentin Celton
Porte de Vanves
Alésia
Cité Universitaire
Tolbiac
Porte d'Ivry
Pierre Curie
Ivry sur-Seine
Malakoff
Maison Blanche
Maisons-Alfort
Créteil L'Échat

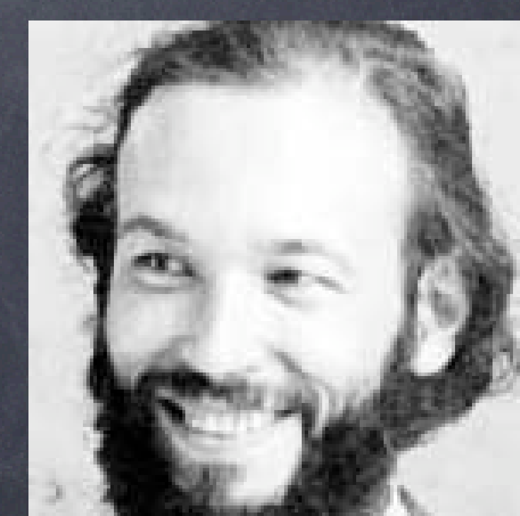
Questions et conseils:



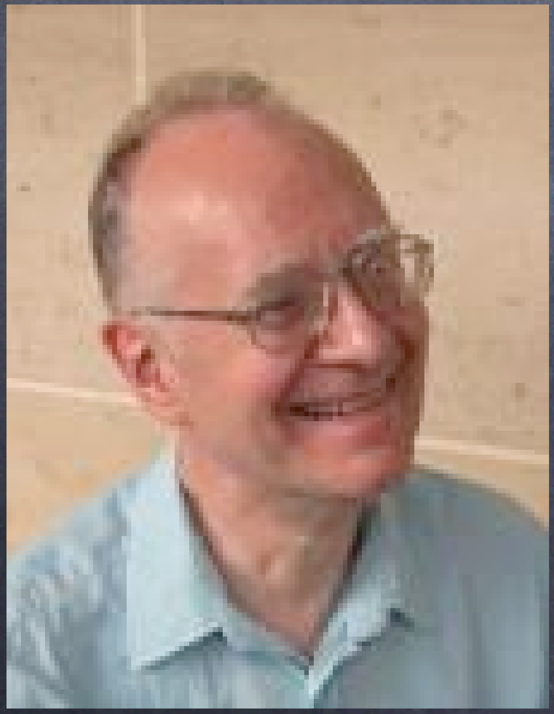
Soit X une surface K3 polarisée générique en car p. Est-elle ordinaire, de rho = 1?



....
Effectivement...mais les surfaces supersingulières sont les plus intéressantes.



Est-ce qu'on peut mieux comprendre l'isomorphisme de Hyodo-Kato?



....

Peut-être, en commençant avec les structures log "creuses."


log smooth. not of

Je ne sais pas pourquoi personne ne travaille sur les cycles invariants en caractéristique mixte.

Autour de [D-I]

- Rappels et énoncés [D-I, O-V]
- Base de la construction fondamentale
- Calcul géométrique de la p-courbure
- Remarques et compléments

Rappels

Soit X/S propre lisse de dim d, $S := \operatorname{Spec} k$, k corps parfait, car exp. $p > 0, \tilde{S} := \operatorname{Spec} W_2(k)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F"] \arrow[dr] & X' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
 & S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}$$

Théorème [D-I]: Si $p \geq d$, alors un relèvement $\tilde{X}'$ de X' induit un isomorphisme dans $D(\mathcal{O}_{X'})$:

$$C^{\cdot}_{\tilde{X}} \colon (F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}, d) \sim (\Omega^{\cdot}_{X'/S}, 0) \quad \text{t.q.}$$

$$\forall q : \mathcal{H}^q(C^{\cdot}_{\tilde{X}}) \colon F_* \mathcal{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S}, d) \to \Omega^q_{X'/S}$$

soit l'isom. de Cartier

La démonstration est "élémentaire" et utilise des relèvements de Frobenius locaux, mais, par choix, pas de techniques cristallines.

Parmis les conséquences en caractéristique zéro: la décomposition de Hodge, théorèmes d'évanescences…

La théorie de Simpson suggère la possibilité d'une généralisation:

$(\mathcal{O}_X, d)$ remplacé par $(E, \nabla) \in MIC(X/S)$

$(\Omega^{\cdot}, d)$ remplacé par $(E \otimes \Omega^{\cdot}, d)$

$(\mathcal{O}_X, 0)$ remplacé par $(E', \psi') \in HIG(X'/S)$

$(\Omega^{\cdot}, 0)$ remplacé par $(E' \otimes \Omega^{\cdot}, \wedge\psi')$.

$$\begin{aligned} HIG(X'/S) &:= \{E' \xrightarrow{\psi'} E' \otimes \Omega^1_{X'/S} : \psi' \wedge \psi' = 0\} \\ &\equiv Mod(\mathcal{O}_{\mathbf{T}^*_{X'/S}}) \end{aligned}$$

Vers une version “nonabelienne”

(avec Vadim Vologodsky, commencé nov., 2001)

Nonabelian Hodge Theory in Characteristic p.

A. Ogus and V. Vologodsky

June 21, 2005

Abstract

Given a scheme in characteristic p together with a lifting modulo p^2, we construct a functor from a category of suitably nilpotent modules to the category of Higgs modules. We use this functor to generalize the decomposition theorem of Deligne-Illusie to the case of de Rham cohomology with coefficients.

Contents

"Il n'y a que Luc qui écrit pour l'éternité."

(Michel Raynaud)

Théorème [O-V]: Un relèvement $\tilde{X}'$ de X' induit un foncteur

$$C_{\tilde{X}}\colon MIC(X/S) \to HIG(X'/S) : (E, \nabla) \mapsto (E', \psi')$$

induisant une équivalence de catégories

$$MIC_{p-1}(X/S) \to HIG_{p-1}(X'/S).$$

Pour $d := \dim(X/S)$ et $E \in MIC_{p-d}(X/S)$, on a un isomorphisme dans $D(\mathcal{O}_{X'})$:

$$C^{\cdot}_{\tilde{X}}\colon F_*(E \otimes \Omega^{\cdot}_{X/S}, d) \sim (E' \otimes \Omega^{\cdot}_{X'/S}, \wedge\psi')$$

$$\mathcal{H}^q(C^{\cdot}_{\tilde{X}}) = \quad \text{(isom de Cartier généralisé)}$$

Localement sur X, on à un isomorphisme:

$$F^*(E', \psi') \cong (E, -\psi)$$

qui dépend d'un relèvement de Frobenius.

$C_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ est compatible à $\otimes$, où défini.

Amélioration: $\otimes$-categories: MIC_γ, HIG_γ

$HIG_\gamma =$ la cat. de $\hat{\Gamma}^{\cdot} T_{X'/S}$-modules

$MIC_\gamma =$ la cat. de $D^\gamma_{X/S}$-modules

$$D_{X/S} \subseteq D^\gamma_{X/S} := D_{X/S} \otimes_{S^{\cdot} T_{X'/S}} \hat{\Gamma}^{\cdot} T_{X'/S}.$$

Équivalence de $\otimes$-catégories:

$$C_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} : MIC_\gamma(X/S) \to HIG_\gamma(X'/S)$$

Interpretation à la Riemann-Hilbert-Fontaine:

On construit à partir de $\tilde{X}'$ un faisceau de $D^{\gamma}_{X/S}$-modules $\mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ (analog de $\mathcal{O}_{X^{an}}$?). Alors:

$$C_{\tilde{X}}(E,\nabla) := \left((E \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})^{\nabla^{\gamma}}, \mathrm{id} \otimes \psi_{\mathcal{A}}\right)$$

$\mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ est le faisceau de fonctions sur le torseur de relèvements de Frobenius, et est muni d'une structure canonique de $D^{\gamma}_{X/S}$-module.

L’isomorphisme dérivé

$$
\begin{tikzcd}
E' \otimes \Omega^2_{X'/S} \arrow[r] & E \otimes \mathcal{A}^{0,2}_{n-2} \arrow[r, "d"] & E \otimes \mathcal{A}^{1,2}_{n-2} \arrow[r, "d"] & E \otimes \mathcal{A}^{2,2}_{n-2} \arrow[r] & \cdots \\
E' \otimes \Omega^1_{X'/S} \arrow[r] \arrow[u, "\psi'"] & E \otimes \mathcal{A}^{0,1}_{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \psi"] & E \otimes \mathcal{A}^{1,1}_{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \psi"] & E \otimes \mathcal{A}^{2,1}_{n-1} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \psi"] & \cdots \\
E' \arrow[r] \arrow[u, "\psi'"] & E \otimes \mathcal{A}^{0,0}_{n} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \psi"] & E \otimes \mathcal{A}^{1,0}_{n} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \psi"] & E \otimes \mathcal{A}^{2,0}_{n} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \psi"] & \cdots \\
& E \arrow[r, "d"] \arrow[u] & E \otimes \Omega^1_{X/S} \arrow[r, "d"] \arrow[u] & E \otimes \Omega^2_{X/S} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Le torseur de relèvements de Frobenius

Pour $T \in Cris(X/S)$, on dispose d'un diagramme commutatif et canonique

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r, "F_{T/S}"] \arrow[d, "f_{T/S}"'] & T' \\
X \arrow[r, "F"] & X' & U' \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$Cris_f(X/\tilde{S}) := \{\tilde{T} \in Cris(X/\tilde{S}) : \tilde{T}/\tilde{S} \quad \text{plat}\}$$

Pour $U \subseteq T := \tilde{T} \times_{\tilde{S}} S$,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(U) := \{\tilde{F} \colon \tilde{U} \to \tilde{X}', \text{rel. de } f_{T/S}\}.$$

C'est un $f^*_{T/S} T_{X'/S}$-torseur, rel. affine sur T.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}/\mathcal{S},T} := \operatorname{Spec}_T \mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S},T}$$

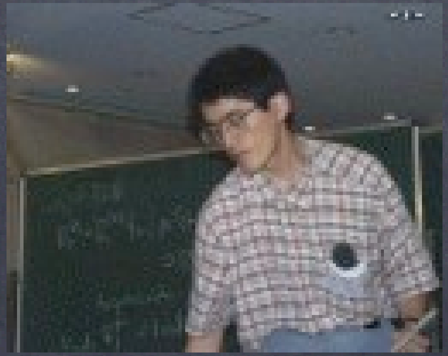
$\mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ est donc un cristal de $\mathcal{O}_{X/S}$-modules quasi-cohérent, muni d'une structure de $F^*\mathbf{T}_{X'/S}$-torseur horizontal. Donc

- Identification $\mathbf{T}_{\mathcal{L}/X} \cong F^*\mathbf{T}_{X'/S}$.

- Filtration horizontale, stable et nilpotente $N.$,

$$\mathrm{Gr}^N_{\cdot} \mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \cong F^* S^{\cdot}\Omega^1_{X'/S}$$

- Action de $F^*S^{\cdot}T_{X'/S}$ qui se prolonge à $F^*\hat{\Gamma}^{\cdot}T_{X'/S}$,



- Connexion ∇ et p-courbure

$$\nabla\colon \mathcal{L}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \to \mathbf{T}_{\mathcal{L}} \otimes \Omega^1_{X/S} \cong \mathcal{H}om(F^*\Omega^1_{X'/S}, \Omega^1_{X/S})$$

$$\psi\colon \mathcal{L}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \to \mathbf{T}_{\mathcal{L}} \otimes F^*\Omega^1_{X'/S} \cong \mathcal{H}om(F^*\Omega^1_{X'/S}, F^*\Omega^1_{X'/S})$$

Formules clées: Pour $\tilde{F} \in \mathcal{L}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$,

$$\nabla(\tilde{F}) = p^{-1}\tilde{F}^*, \qquad \psi(\tilde{F}) = -\mathrm{id}.$$

Connexions et p-courbure géométrique

Prop. Soit X/S lisse, $(D, \bar{I})$ l'enveloppe à puissances divisées de $X \to X \times_S X$. On dispose d'isomorphismes canoniques

$$\Omega^1_{X/S} \cong \bar{I}/\bar{I}^{[2]} \quad da \mapsto [1 \otimes a - a \otimes 1]$$

$$F^*\Omega^1_{X'/S} \cong \bar{I}/\left(I\mathcal{O}_D + \bar{I}^{[p+1]}\right)$$
$$\pi^* da \mapsto [(1 \otimes a - a \otimes 1)^{[p]}]$$

Pour $(E, \nabla) \in MIC(X/S)$, on a un isomorphisme

$\epsilon\colon p_2^*E \cong p_1^*E$ sur D, et:

$$\nabla(e) \quad = \quad \epsilon(p_2^*(e)) - p_1^*(e) \quad \mod \overline{I}^{[2]}$$ (Groth.)

$$\psi(e) \quad = \quad \epsilon(p_2^*(e)) - p_1^*(e) \quad \mod I\mathcal{O}_D + \overline{I}^{[p+1]}$$

(Mochizuki)

Le calcul principal

Pour $\tilde{F} \in \mathcal{L}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\tilde{U})$, posons

$$\tilde{F}_i := \tilde{F} \circ p_i \in \mathcal{L}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\tilde{D}(1)),$$

$$a' := \pi^*(a) \text{ pour } a \in \mathcal{O}_X.$$

On a $\tilde{F}_2 = \theta + \tilde{F}_1$, où $\theta \in f^*_{D/S} T_{X'/S}$ avec

$$p\theta(a') = \tilde{F}_2^*(\tilde{a}') - \tilde{F}_1^*(\tilde{a}') = 1 \otimes \tilde{F}^*(a') - \tilde{F}^*(a') \otimes 1$$

Si $\tilde{F}^*(\tilde{a}') = \tilde{a}^p + p\tilde{b}$,

$$\theta(a') = p^{-1}((1 \otimes \tilde{a}^p) - (\tilde{a}^p \otimes 1)) + (1 \otimes b - b \otimes 1)$$

$$\nabla(\tilde{F}) = \theta(a') = a^{p-1}da + db \bmod \overline{I}^{[2]}$$

On peut alors calculer la p-courbure à partir d'une formule de Serre (?).

$$(D(a))^p = a^{p-1}D^p(a) - D^{p-1}(a^{p-1}D(a)).$$

Calcul par géométrie cristalline

Posons $\zeta := 1 \otimes \tilde{a} - \tilde{a} \otimes 1 \in I\mathcal{O}_{\tilde{D}(1)}$.

Donc modulo $pI\mathcal{O}_D + p\overline{I}^{[p+1]}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_2^*(\tilde{a}') - \tilde{F}_1^*(\tilde{a}') &= 1 \otimes \tilde{a}^p - \tilde{a}^p \otimes 1 + p(1 \otimes \tilde{b} - \tilde{b} \otimes 1) \\
&= (\zeta + \tilde{a} \otimes 1)^p - (\tilde{a} \otimes 1)^p \\
&= \zeta^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \zeta^i (\tilde{a} \otimes 1)^{p-1} \\
&= p!\zeta^{[p]} \\
&= -\zeta^{[p]}
\end{aligned}$$

Pour conclure

$$c\colon S^{\cdot}T_{X'/S} \to F_*D_{X/S} \quad \theta \mapsto \theta^p - \theta^{(p)} \quad \text{(la p-courbure)}$$

Les actions de $S^{\cdot}T_{X'/S} \subset F_*D_{X/S}$ (p-courbure) et de $S^{\cdot}T_{X'/S} \subset \hat{\Gamma}^{\cdot}T_{X'/S}$ (structure de $F^*\mathbf{T}$-torseur) sur $\mathcal{A}_{\mathcal{X}/S}$ sont les mêmes, et donc induisent une action de

$$D^{\gamma}_{X/S} := \hat{\Gamma}^{\cdot}T_{X'/S} \otimes_{S^{\cdot}T_{X'/S}} F_*D_{X/S}.$$

$F_*D_{X/S}$ est une algèbre d'Azumaya sur $S^{\cdot}T_{X'/S}$ de rang p^{2d} [BMRB].

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, \mathcal{O}_X)$$

est un module sur $D^{\gamma}_{X/S}$, localement libre de rang p^d sur $\hat{\Gamma}^{\cdot}(T_{X'/S})$, donc un module de scindage.

$$C_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(E) = (\mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \otimes E)^{\nabla^{\gamma}} = \iota_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{\gamma}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, E)$$

Rémarques et Compléments

- Gerbes de relèvements et scindages
- Calcul d'une classe de Brauer
- Objets G_m-equivariants
- Version log (Schepler, Lorenzon)
- Fonctorialité
- Conséquences en caractéristique 0

Gerbes de relèvements et scindages

Théorème: On a des équivalences de gerbes sur X:

- Relèvements $\tilde{X}'$ de X'.
- Scindages de $\Omega^{\cdot}_X$ (gerbe associé). [D-I]
- Extensions de $F^*\Omega^1_{X'/S}$ par $\mathcal{O}_X$ dans $MIC(X/S)$ t.q. $\operatorname{Gr}\psi = \mathrm{id}$. [Srinivas?].
- Scindages de $F_*D_{X/S}$ sur $\mathbf{T}^*_{X'/S,1}$ prolongeants le scindage canonique $F_*\mathcal{O}_X$.
- Scindages tensoriels de $F_*D_{X/S}$ sur $\hat{\mathbf{T}}^*_{X'/S,\gamma}$.

Calcul d'une classe de Brauer

L'algèbre $F_{X*}D_X$ n'est jamais scindée sur $\mathbf{T}^*_{X'/S}$. Donc sa classe dans $H^2(\mathbf{T}^*_{X'/S}, \mathbb{G}_m)$ n'est pas nulle.

Soit $\omega \in H^0(\mathbf{T}^*_{X'/S}, \Omega^1_{\mathbf{T}^*_{X'/S}})$ la forme canonique "contacte." (E.g. si $X = \operatorname{Spec} k[t], \omega = \xi dt$)
Soit $\mathbf{T}^* := \mathbf{T}^*_{X/S}$. On a

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^*_{\mathbf{T}^{*\prime}} \xrightarrow{F^*_{\mathbf{T}^*/S}} \mathcal{O}^*_{\mathbf{T}^*} \xrightarrow{dlog} Z^1_{\mathbf{T}^*/S} \xrightarrow{\pi^* - C_{\mathbf{T}^*/S}} \Omega^1_{\mathbf{T}^{*\prime}/S} \longrightarrow 0.$$

Donc ϕ: $H^0(\mathbf{T}^{*\prime}, \Omega^1_{\mathbf{T}^{*\prime}/S}) \to H^2(\mathbf{T}^{*\prime}, \mathbb{G}_m)$

Formule : $cl(F_* D_{X/S}) = \phi(\omega)$ [B-B]

Démonstration:

On a une équivalence de gerbes:

- $(L, \nabla) \in \mathbf{Pic}^\natural(\mathbf{T}^*/S) : \psi = \omega)$
- $(E, \nabla) \in MIC(X/S)$: F_*E scindage de $F_*D_{X/S}$.

$$L \mapsto Ker(L \to L \otimes \Omega^1_{\mathbf{T}^*/S} \to \Omega^1_{\mathbf{T}^*/X})$$

Marche parce que l'image de ω dans $\Omega^1_{\mathbf{T}^*/X} = 0$.

Objets $\mathbb{G}_m$-equivariants

$HIG_{\mathbb{G}_m}(Y'/S) := Mod(\mathbf{T}^*_{Y'/S}/\mathbb{G}_m)$ (champs torique)

$\equiv \psi_*: E_* \to E_* \otimes \Omega^1_{X'/S}$ $\mathbf{Z}$-gradué

e.g. X/Y lisse, propre, $h': \tilde{X}' \to \tilde{Y}'$ rel. de h'

$$\kappa': H^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{X'/Y'}) \to H^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{X'/Y'}) \otimes \Omega^1_{Y'/S}$$

Théorème: Si $p > \dim X$, $\tilde{X}' \to \tilde{Y}'$ induit

$$C^{-1}_{\tilde{Y}}(H^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{X'/Y'})) \cong (H_{DR}(X/Y), \nabla)$$

Relations aux résulats de Katz, Illusie, Faltings

E.g. Modules de Fontaine (MF^{∇}) tués par p équivauent

$$(E, \nabla, Fil), \text{ et } \phi\colon C_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(E) \xrightarrow{\sim} \pi^*(\mathrm{Gr}_F(E), \kappa)$$

Résultats de compatabilités aux images inverses et directes.......

Conséquences en caractéristique 0

Théorème [B-K]: Soit $\tilde{X}/\mathbf{C}$ lisse, quasi projectif, $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbf{A}^1$ un morphisme *propre*. Pour $q > 0$,

$$\dim H^q(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}, d + d\tilde{f}) = \dim H^q(\tilde{X}, \Omega^{\cdot} \wedge d\tilde{f}) < \infty.$$

(Le cas $\tilde{f} = 0$ est la décomposition de Hodge.)

Dém de [O-V], basée sur la tech. de red. mod p.

Calcul Clé

$X :=$ reduction de $\tilde{X}$. Soit $\tilde{Z}$ le lieu critique de $\tilde{f}$. $(\mathcal{O}_X, d + df) \in MIC(X/S)$ n'est pas nilpotent, mais le devient modulo $F^* I_Z^r$. Pour $p >> r$,

$$(*)\ C_{\tilde{X}}(\mathcal{O}_X, d + df) \cong (\mathcal{O}_{X'}, -df') \bmod I_Z^r$$

Il faut reśoudre des équations différentielles dans $\mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. Tronqué de e^f ne suffit pas.

Soit $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ la fonction qui envoie $\tilde{F}$ sur $\tilde{F}^*(\tilde{f}) - \tilde{f}^p$.

$$\nabla(\alpha) = -f^{p-1}df; \quad \psi(\alpha) = F^*(df)$$

$$(*)\ C_{\tilde{X}}(\mathcal{O}_X, d + df) \cong (\mathcal{O}_{X'}, -df') \bmod I_Z^r$$

L'isomorphisme $(*)$ est donné par multiplication par

$$E_p(f)\exp(\alpha) \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \quad \text{(tronqué)}$$

Il faut aussi démontrer que $H^*_{DR}(\Omega^\cdot_{\tilde{X}}, d + d\tilde{f})$ est de type fini sure $\mathbf{Z}$. Il faut utiliser l'irrégularité [D] et techniques logarithmiques [I].